الدرس 1 النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد

- **تحديد موضع جسيم على خط مستقيم (نظام أحادى البعد) :**

لتحديد موضع جسيم على خط مستقيم معلوم بالنسبة لنقطة اختيارية ثابتة عليه تسمى بنقطة الأصل يلزم معرفة بُعد هذا الجسيم عن هذه النقطة.

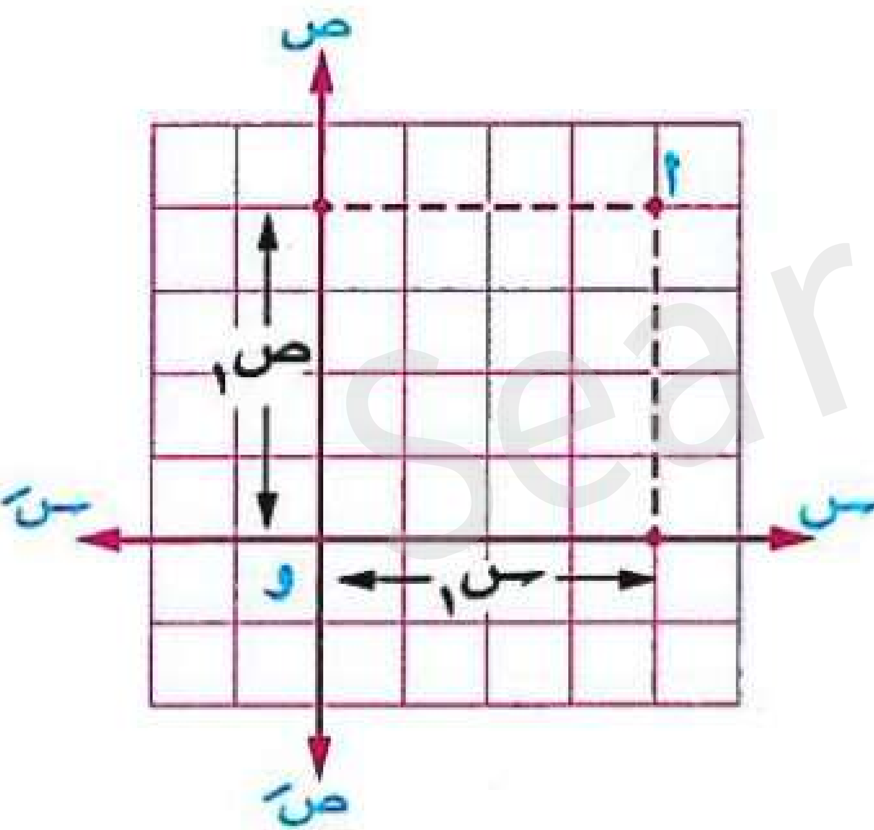


ففى الشكل المقابل :

و أ = $س_١$ ، $س_١ \in ح$

- **تحديد موضع جسيم فى مستوى (نظام إحداثى ثنائى الأبعاد) :**

لتحديد موضع جسيم فى مستوى يلزم معرفة مسقط هذا الجسيم على كل من محورى إحداثيات متعامدة فى هذا المستوى.



ففى الشكل المقابل :

أ = $(س_١ ، ص_١) \in ح^٢$

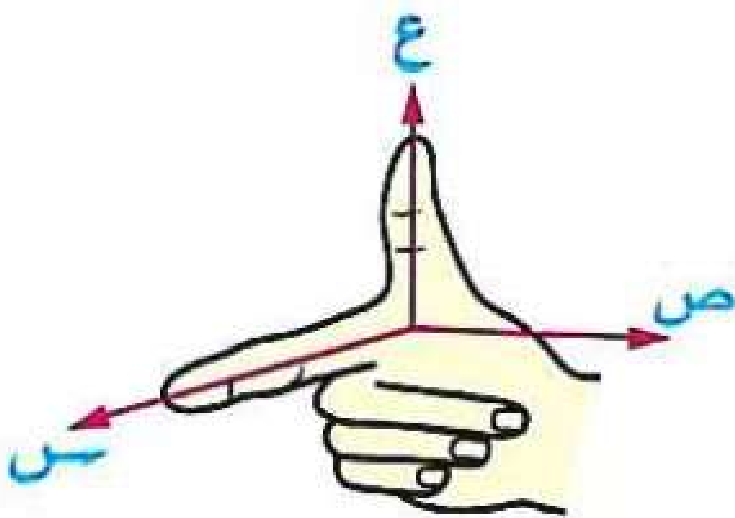
حيث المستقيم $\overleftrightarrow{س س'}$ يمثل محور السينات

، المستقيم $\overleftrightarrow{ص ص'}$ يمثل محور الصادات

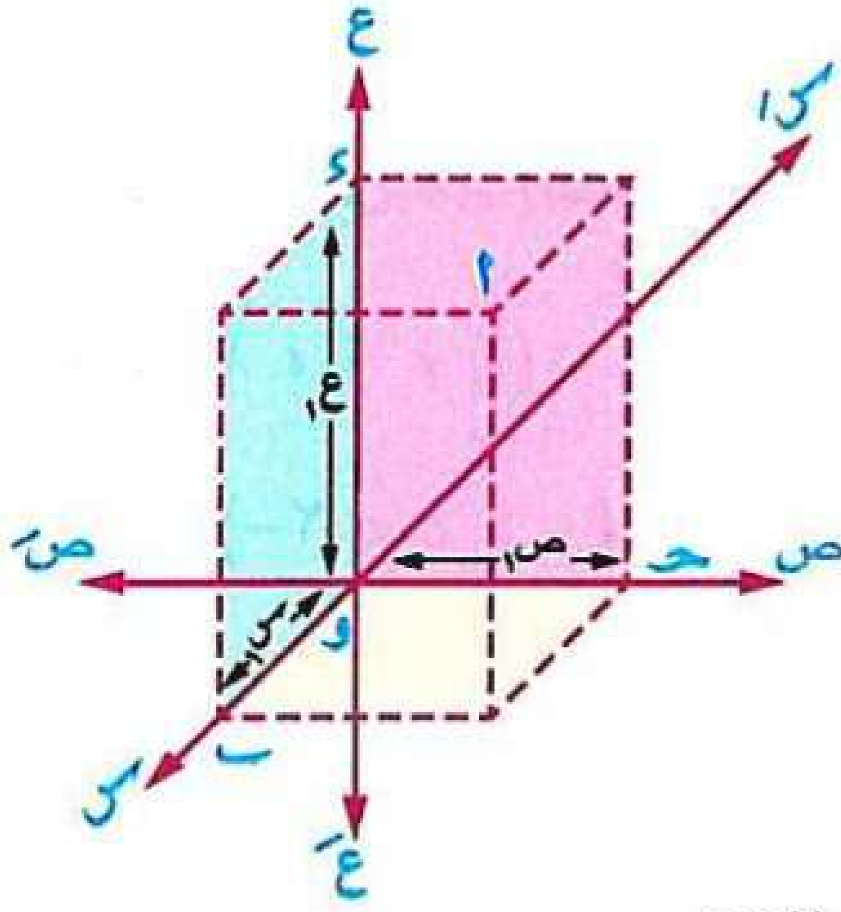
والمحوران متعامدان ويتقاطعان فى نقطة الأصل و

- **تحديد موضع جسيم فى الفراغ (نظام إحداثى ثلاثى الأبعاد) $ح^٣$:**

بفرض ثلاثة مستقيمات $\overleftrightarrow{س و س'}$ ، $\overleftrightarrow{ص و ص'}$ ، $\overleftrightarrow{ع و ع'}$ فى الفراغ متقاطعة فى نقطة «و» ومتعامدة مثنى مثنى بحيث تكون نظام إحداثى متعامد حسب قاعدة اليد اليمنى الموضحة بالشكل المقابل



حيث تستخدم وضعية الأصابع الموضحة ليشير السبابة إلى الاتجاه الموجب للمحور س والوسطى إلى الاتجاه الموجب للمحور ص والإبهام إلى الاتجاه الموجب للمحور ع



فتتعين إحداثيات النقطة أ

في الفراغ بالثلاثي المرتب أ (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$) ∈ ح^3

ومنها فإن النقاط :

ب (س$_1$ ، ٠ ، ٠) ، حـ (٠ ، ص$_1$ ، ٠)

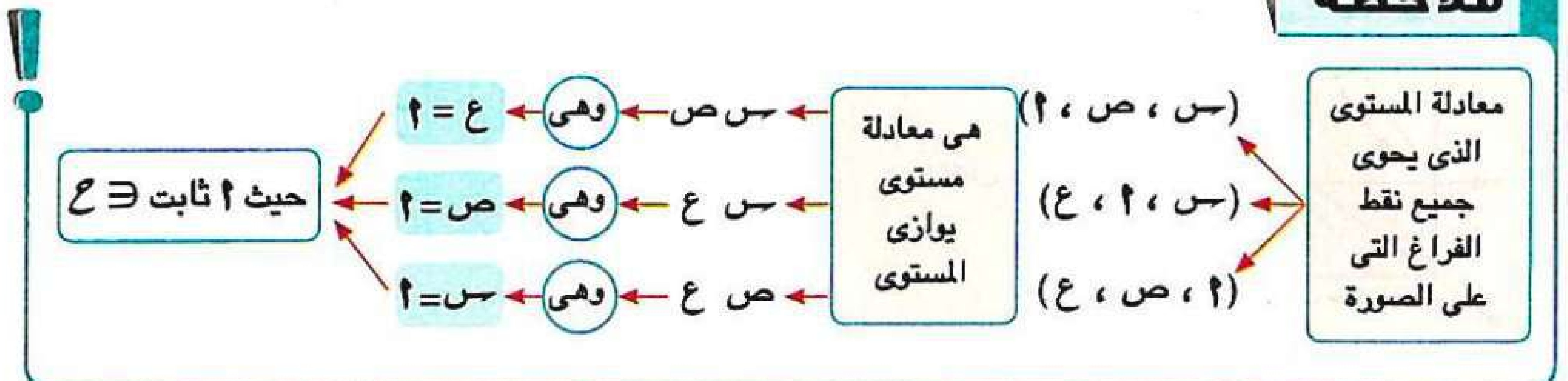
، د (٠ ، ٠ ، ع$_1$)

هي مساقط النقطة أ على المحاور الثلاثة س ، ص ، ع على الترتيب.

- **مستويات الإحداثيات :**

المستوى الإحداثي س ص	المستوى الإحداثي س ع	المستوى الإحداثي ص ع
يحوى جميع نقط الفراغ التى إحداثياتها (س ، ص ، ٠) وتكون معادلته ع = ٠	يحوى جميع نقط الفراغ التى إحداثياتها (س ، ٠ ، ع) وتكون معادلته ص = ٠	يحوى جميع نقط الفراغ التى إحداثياتها (٠ ، ص ، ع) وتكون معادلته س = ٠

ملاحظة



مثال ①

عين موضع كل من النقط الآتية باستخدام نظام إحداثى متعامد ثلاثى الأبعاد :

① أ (٣ ، ٢ ، ٣)　　② ب (-٤ ، ٤ ، -٢)

③ حـ (-٢ ، ٤ ، ٠)

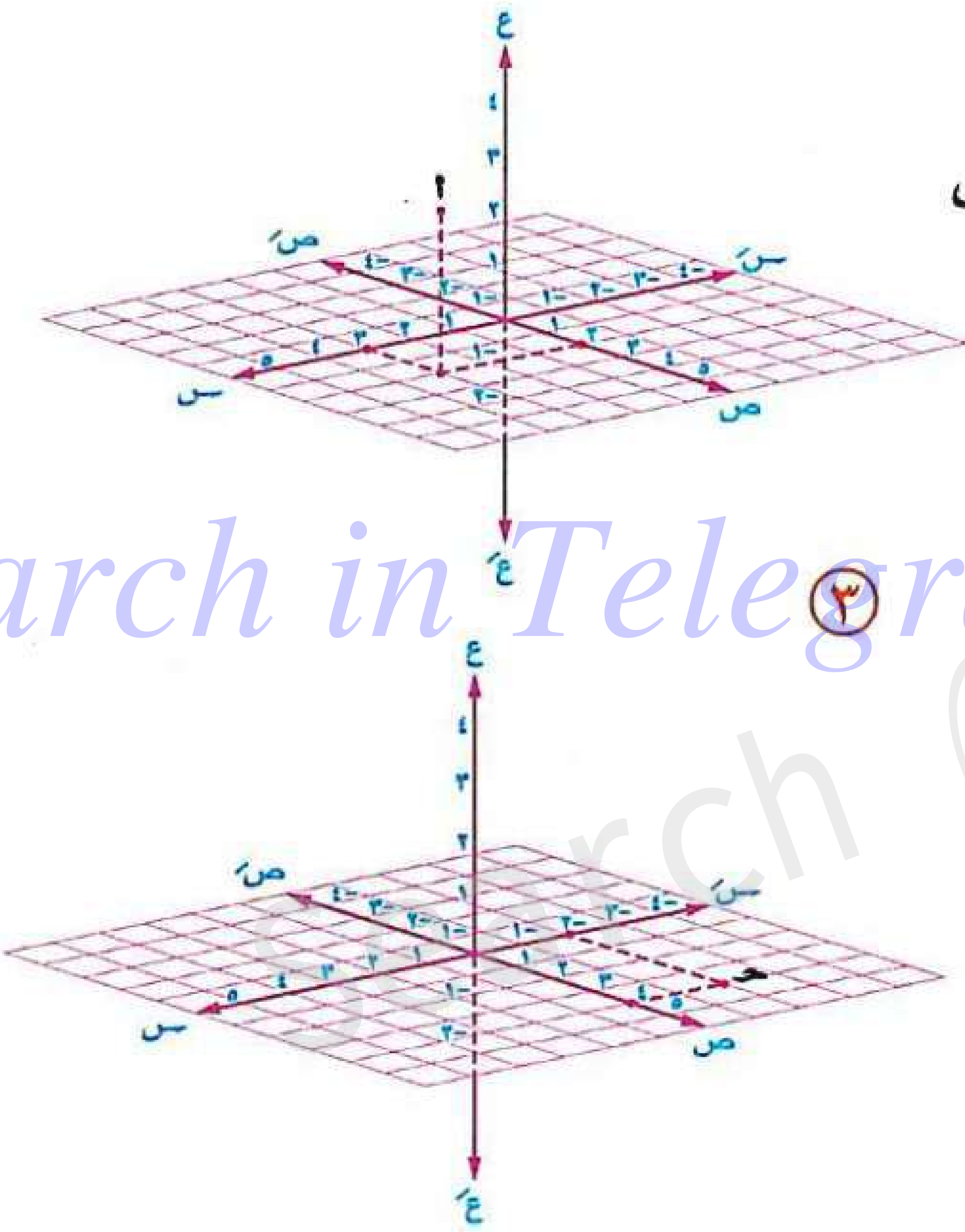
الحل

① لتعيين النقطة أ (٣ ، ٢ ، ٣)

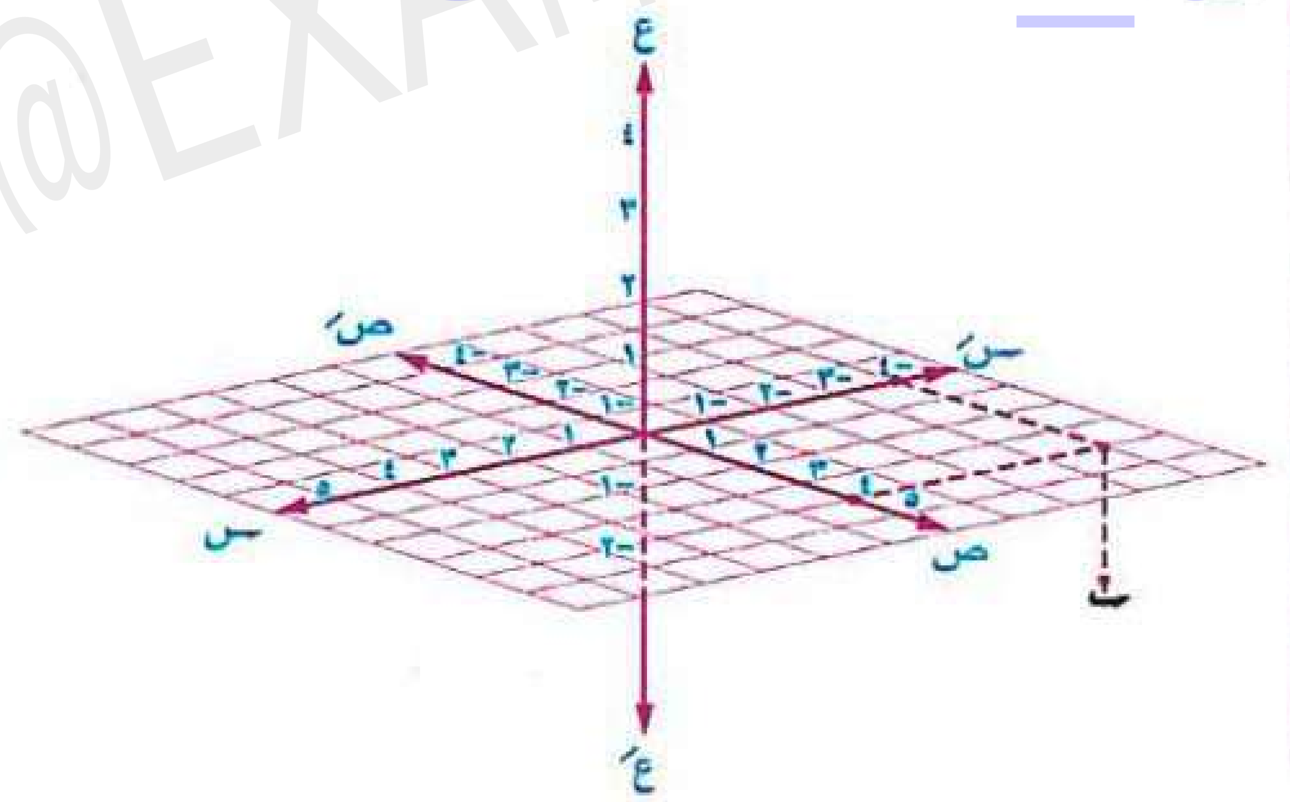
نحدد النقطة (٣ ، ٢) فى المستوى س ص

ثم نتحرك ٣ وحدات فى الاتجاه الموجب

للمحور ع



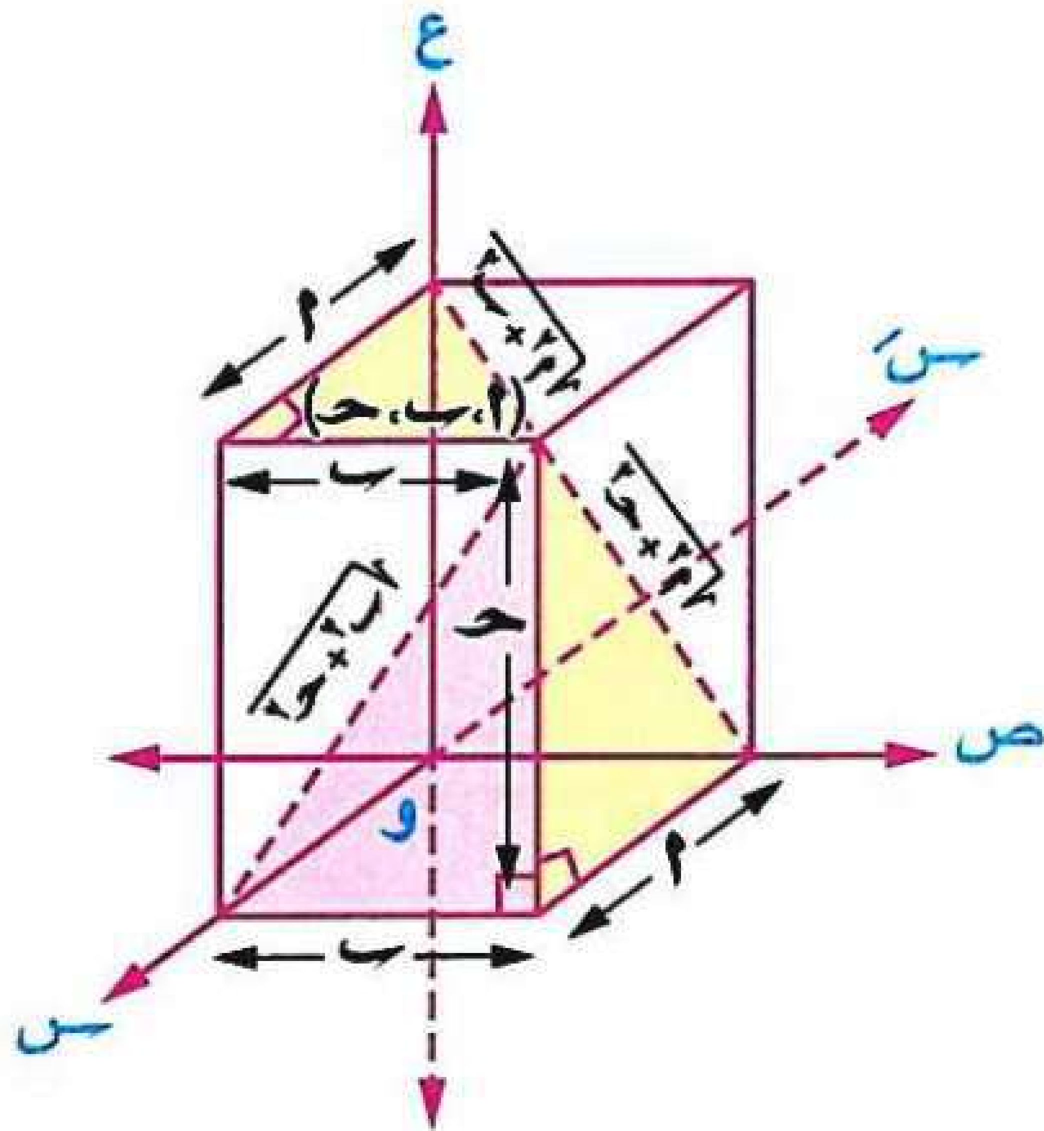
②



بعد نقطة فى الفراغ عن محاور الإحداثيات

• بُعد النقطة (أ ، ب ، حـ)

عن المحور س	=	$\sqrt{ب^{٢} + حـ^{٢}}$
عن المحور ص	=	$\sqrt{أ^{٢} + حـ^{٢}}$
عن المحور ع	=	$\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}$



ملاحظات

- النقطة (س ، ٠ ، ٠) تقع على المحور س • النقطة (٠ ، ص ، ٠) تقع على المحور ص
- النقطة (٠ ، ٠ ، ع) تقع على المحور ع
- النقطة أ (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$):
  - تبعد | س$_١$ | وحدة طول عن المستوى ص ع
  - تبعد | ص$_١$ | وحدة طول عن المستوى س ع
  - تبعد | ع$_١$ | وحدة طول عن المستوى س ص

فمثلًا : النقطة أ (٥ ، −٤ ، ٣) تبعد ٥ وحدات طول عن المستوى ص ع

، ٤ وحدات طول عن المستوى س ع ، ٣ وحدات طول عن المستوى س ص

- المستقيمان $\overleftrightarrow{سس}$ ، $\overleftrightarrow{صص}$ يعينان المستوى س ص

، المستقيمان $\overleftrightarrow{سس}$ ، $\overleftrightarrow{عع}$ يعينان المستوى س ع

، المستقيمان $\overleftrightarrow{صص}$ ، $\overleftrightarrow{عع}$ يعينان المستوى ص ع

- معادلة محور س فى الفراغ هى : ص = ٠ ، ع = ٠
- معادلة محور ص فى الفراغ هى : س = ٠ ، ع = ٠
- معادلة محور ع فى الفراغ هى : س = ٠ ، ص = ٠

مثال ٢

أوجد إحداثيات النقطة أ فى كل من الحالات الآتية :

(١) أ (٢ + م ، ٣ − م ، م) ∈ المستوى س ع

(٢) أ (٣ ل ، ل + ٣ ، ٥ ل) ∈ المحور ص

(٣) أ (٢ + ك ، ٤ ك ، − ك) تبعُد ٥ وحدات طول عن المستوى ص ع

(٤) أ (٤ م ، ٣ م ، م + ١) تبعُد ٥ وحدات عن محور ع

الحـــل

① ∵ ﺃ (٢ + م ، ٣ − م ، م) ∈ المستوى س ع

∴ ٣ − م = ٠ ∴ م = ٣ ∴ ﺃ (٥ ، ٠ ، ٣)

② ∵ ﺃ (٣ ل ، ل + ٣ ، ٥ ل) ∈ المحور ص

∴ ٣ ل = ٥ ل = ٠ ∴ ل = ٠ ∴ ﺃ (٠ ، ٣ ، ٠)

③ ∵ ﺃ (٢ + ك ، ٤ ك ، − ك) تبعُد ٥ وحدات طول عن المستوى ص ع

∴ ٢ + ك = ٥ ∴ ك = ٣ ∴ ﺃ (٥ ، ١٢ ، −٣)

أ، ٢ + ك = −٥ ∴ ك = −٧ ∴ ﺃ (−٥ ، −٢٨ ، ٧)

④ ∵ $\sqrt{(٤م)^٢ + (٣م)^٢}$ = ٥ ∴ ١٦ م^٢ + ٩ م^٢ = ٢٥ ∴ ٢٥ م^٢ = ٥^٢

∴ م^٢ = ١ ∴ م = ± ١

∴ ﺃ (٤ ، ٣ ، ٢) أ، ﺃ (−٤ ، −٣ ، ٠)

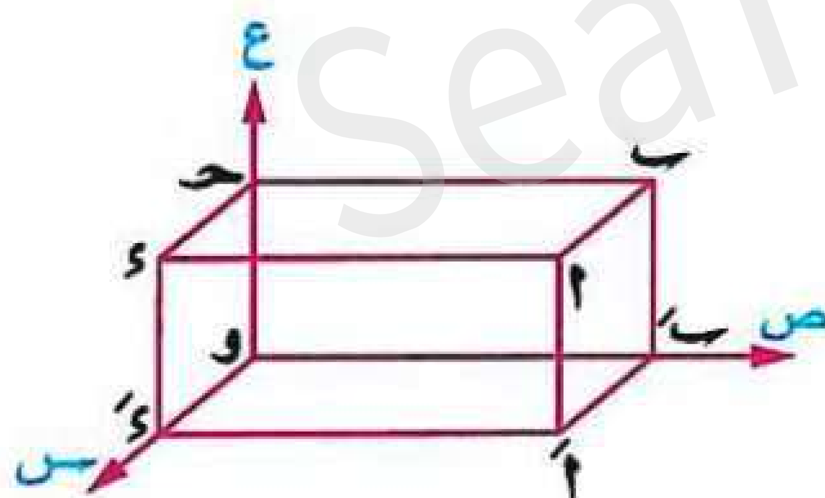
مثال ٣

فى الشكل المقابل :

ﺃ ب حـ ء ﺃَ بَ وَ ءَ متوازى مستطيلات فيه : ﺃ (٣ ، ٧ ، ٥)

أوجد : ① إحداثيات النقط : ب ، بَ ، حـ ، ء ، ءَ ، ﺃَ

② حجم متوازى المستطيلات.



الحـــل

① ب (٠ ، ٧ ، ٥) «لاحظ أن : ب ∈ المستوى ص ع»

، بَ (٠ ، ٧ ، ٠) «لاحظ أن : بَ ∈ محور ص»

، حـ (٠ ، ٠ ، ٥) «لاحظ أن : حـ ∈ محور ع»

، ء (٣ ، ٠ ، ٥) «لاحظ أن : ء ∈ المستوى س ع»

، ءَ (٣ ، ٠ ، ٠) «لاحظ أن : ءَ ∈ محور س»

، ﺃَ (٣ ، ٧ ، ٠) «لاحظ أن : ﺃَ ∈ المستوى س ص»

② حجم متوازى المستطيلات = ٣ × ٧ × ٥ = ١٠٥ وحدة مكعبة.

البعد بين نقطتين فى الفراغ

سبق لك دراسة البُعد بين نقطتين :

$أ(س_١ ، ص_١)$ ، $ب(س_٢ ، ص_٢)$

فى المستوى الإحداثى ثنائى البعد حيث :

$$أب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

أما إذا كانت النقطتان أ ، ب فى الفراغ ثلاثى الأبعاد

حيث : $أ(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ ، $ب(س_٢ ، ص_٢ ، ع_٢)$

فإن البعد بين النقطتين أ ، ب يعطى بالعلاقة :

$$أب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$$

فمثلًا : إذا كانت : أ(٢ ، −٣ ، ٥) ، ب(٤ ، ١ ، −١)

فإن : $أب = \sqrt{(٢ - ٤)^٢ + (-٣ - ١)^٢ + (٥ + ١)^٢} = ٢\sqrt{١٤}$ وحدة طول.

مثال ٤

إذا كان : أ(٦ ، ٠ ، ٣) ، ب(٧ ، ١ ، ٧) ، ح(٩ ، ٣ ، ١٥)

أثبت أن : أ ، ب ، ح على استقامة واحدة.

الحـــل

$أب = \sqrt{(٦ - ٧)^٢ + (٠ - ١)^٢ + (٣ - ٧)^٢} = ٣\sqrt{٢}$ وحدة طول.

، $ب ح = \sqrt{(٧ - ٩)^٢ + (١ - ٣)^٢ + (٧ - ١٥)^٢} = ٦\sqrt{٢}$ وحدة طول.

، $أ ح = \sqrt{(٦ - ٩)^٢ + (٠ - ٣)^٢ + (٣ - ١٥)^٢} = ٩\sqrt{٢}$ وحدة طول.

∴ أ ح = أ ب + ب ح

∴ أ ، ب ، ح تقع على استقامة واحدة.

مثال ٥

أثبت أن : Δ أ ب حـ حيث أ (٤ ، ١ ، ٥) ، ب (−٤ ، ٣ ، ١) ، حـ (−٢ ، ٥ ، ١)

منفرج الزاوية فى حـ

الحل

(أ ب)^{٢} = (٤ + ٤)^{٢} + (١ − ٣)^{٢} + (٥ − ١)^{٢} = ٨٤

، (ب حـ)^{٢} = (−٤ + ٢)^{٢} + (٣ − ٥)^{٢} + (١ − ١)^{٢} = ٨

، (أ حـ)^{٢} = (٤ + ٢)^{٢} + (١ − ٥)^{٢} + (٥ − ١)^{٢} = ٦٨

، ∵ (أ ب)^{٢} > (أ حـ)^{٢} + (ب حـ)^{٢}

∴ Δ أ ب حـ منفرج الزاوية فى حـ

تذكر أن :

فى المثلث أ ب حـ إذا كان :

- (أ ب)^{٢} = (ب حـ)^{٢} + (أ حـ)^{٢}

  فإن ∠ حـ قائمة.

- (أ ب)^{٢} > (ب حـ)^{٢} + (أ حـ)^{٢}

  فإن ∠ حـ منفرجة.

- (أ ب)^{٢} < (ب حـ)^{٢} + (أ حـ)^{٢}

  فإن ∠ حـ حادة.

إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة

إذا كان : أ (س$_{١}$ ، ص$_{١}$ ، ع$_{١}$) ، ب (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$ ، ع$_{٢}$) نقطتين فى الفراغ

فإن إحداثيات نقطة حـ التى تقع فى منتصف $\overline{\text{أب}}$ هى :

$$\text{حـ} = \left(\frac{\text{س}_{١} + \text{س}_{٢}}{٢} ، \frac{\text{ص}_{١} + \text{ص}_{٢}}{٢} ، \frac{\text{ع}_{١} + \text{ع}_{٢}}{٢}\right)$$

فمثلًا : إذا كان : أ (٥ ، −٤ ، ٠) ، ب (١ ، ٨ ، ٤)

فإن إحداثيات نقطة منتصف $\overline{\text{أب}}$ = (٣ ، ٢ ، ٢)

مثال ٦

إذا كانت : حـ (٣ ، ٢ ، −١) هى منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (٤ ، ٣ ، −١)

أوجد : إحداثيات نقطة ب

الحـــل

بفرض أن إحداثيات نقطة ب هى (س ، ص ، ع)

∵ حـ منتصف $\overline{أب}$ ∴ (٣ ، ٢ ، −١) = $\left(\frac{٤ + س}{٢} ، \frac{٣ + ص}{٢} ، \frac{-١ + ع}{٢}\right)$

∴ ٤ + س = ٦ ∴ س = ٢ ، ٣ + ص = ٤ ∴ ص = ١

، −١ + ع = −٢ ∴ ع = −١ ∴ ب (٢ ، ١ ، −١)

معادلة الكرة فى الفراغ

تعريف

الكرة هى مجموعة نقط الفراغ التى تبعد عن نقطة ثابتة (تعرف بمركز الكرة) بعدًا ثابتًا (يعرف بطول نصف قطر الكرة)

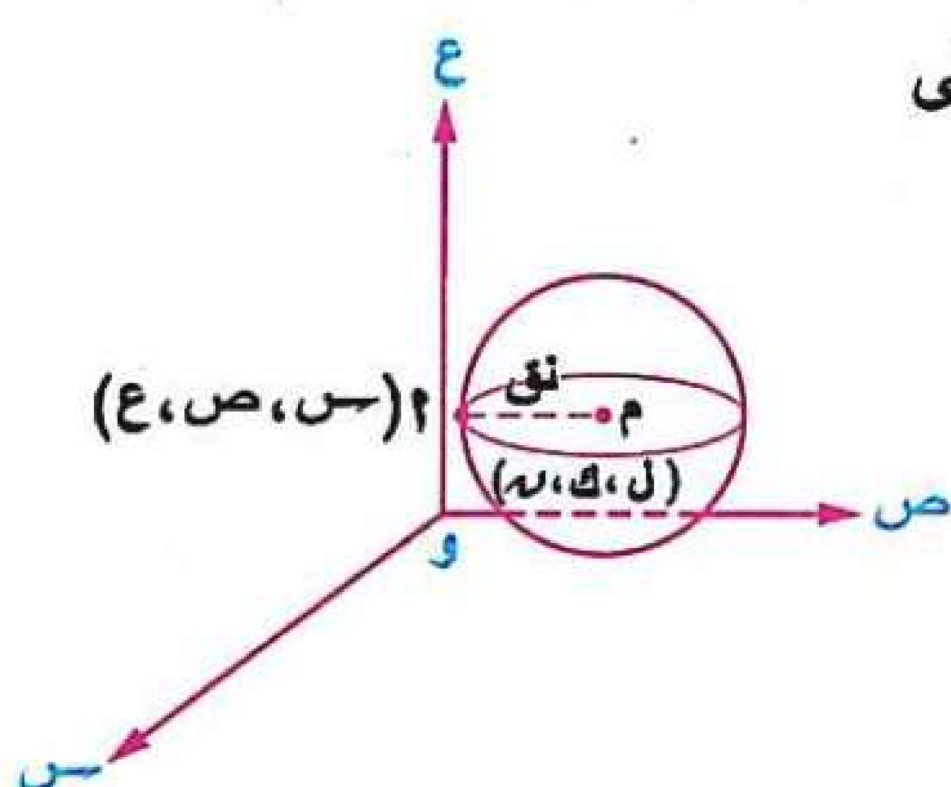
وبفرض النقطة أ (س ، ص ، ع) تقع على سطح الكرة التى مركزها النقطة م (ل ، ك ، ن) وطول نصف قطرها نق فإنه من تعريف الكرة ومن قانون البُعد بين نقطتين فإن :

$\sqrt{(س - ل)^٢ + (ص - ك)^٢ + (ع - ن)^٢}$ = نق

وبتربيع الطرفين :

∴ $(س - ل)^٢ + (ص - ك)^٢ + (ع - ن)^٢$ = $نق^٢$

وهذه هى الصورة القياسية لمعادلة الكرة.



تذكر أن :

- مساحة سطح الكرة = ٤ π $نق^٢$
- حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π $نق^٣$

الصورة العامة لمعادلة الكرة

- سبق لك دراسة معادلة الدائرة فى المستوى : $(س - ء)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$

حيث (ء ، هـ) مركز الدائرة ونق طول نصف قطرها وكانت لها الصورة العامة :

$س^2 + ص^2 + 2 ل س + 2 ك ص + حـ = 0$ ومنها كان مركز الدائرة (– ل ، – ك)

وطول نصف قطرها نق $= \sqrt{ل^2 + ك^2 - حـ}$

- بالمثل يوجد أيضًا الصورة العامة لمعادلة الكرة فى الفراغ والتى يمكن استنتاجها من الصورة القياسية الموضحة سابقًا فتكون الصورة العامة :

$س^2 + ص^2 + ع^2 + 2 ل س + 2 ك ص + 2 ن ع + ء = 0$ ومنها فإن مركز الكرة

هو (– ل ، – ك ، – ن) أى $(-\frac{1}{2}$ معامل س ، $-\frac{1}{2}$ معامل ص ، $-\frac{1}{2}$ معامل ع)

وذلك بشرط أن معامل كل من $س^2$ ، $ص^2$ ، $ع^2$ هو الواحد الصحيح

ومنها أيضًا فإن طول نصف قطر الكرة نق $= \sqrt{ل^2 + ك^2 + ن^2 - ء}$

مثال ٧

أوجد الصورة القياسية لمعادلة الكرة فى كل من الحالات الآتية :

(١) مركزها النقطة (٢ ، –١ ، ١) وطول نصف قطرها ٥ وحدات طول.

(٢) مركزها نقطة الأصل وطول قطرها ٦ وحدات طول.

(٣) النقطتين أ (٢ ، –٣ ، ٥) ، ب (٤ ، ٣ ، ١) هما طرفا قطر فيها.

الحـــل

(١) الصورة القياسية لمعادلة الكرة هى : $(س - 2)^2 + (ص + 1)^2 + (ع - 1)^2 = 25$

(٢) الصورة القياسية لمعادلة الكرة هى : $س^2 + ص^2 + ع^2 = 9$

(٣) مركز الكرة م = منتصف $\overline{أب}$ = $\left(\frac{٢ + ٤}{٢} ، \frac{-٣ + ٣}{٢} ، \frac{٥ + ١}{٢}\right)$ = (٣ ، ٠ ، ٣)

، نق = م أ = $\sqrt{(٢ - ٣)^٢ + (-٣ - ٠)^٢ + (٥ - ٣)^٢}$ = $\sqrt{١٤}$ وحدة طول

∴ الصورة القياسية لمعادلة الكرة هى $(س - ٣)^٢ + (ص - ٠)^٢ + (ع - ٣)^٢ = ١٤$

أى أن : $(س - ٣)^٢ + ص^٢ + (ع - ٣)^٢ = ١٤$

معلومة إثرائية

* معادلة الكرة بمعلومية طرفى قطر فيها :

إذا كان : $(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢ ، ع_٢)$ هما طرفى قطر فى الكرة

فإن معادلتها تكون على الصورة :

$(س - س_١)(س - س_٢) + (ص - ص_١)(ص - ص_٢) + (ع - ع_١)(ع - ع_٢) = ٠$

ويمكن استخدام ذلك فى حل الفرعية (٣) من المثال السابق كالتالى :

معادلة الكرة فى الصورة العامة هى :

$(س - ٢)(س - ٤) + (ص + ٣)(ص - ٣) + (ع - ٥)(ع - ١) = ٠$

أى أن : $س^٢ - ٦ س + ٨ + ص^٢ - ٩ + ع^٢ - ٦ ع + ٥ = ٠$

∴ $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٦ س - ٦ ع + ٤ = ٠$

وتكون الصورة القياسية هى : $(س - ٣)^٢ + ص^٢ + (ع - ٣)^٢ = ١٤$

مثال (٨)

عين مركز وطول نصف قطر الكرة التى معادلتها :

(١) $(س - ٥)^٢ + (ص + ٤)^٢ + (ع + ٢)^٢ = ٢٥$ وأوجد مساحة سطحها.

(٢) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ١٦$ وأوجد حجمها.

الحل

(١) ∵ المعادلة على الصورة القياسية.

∴ مركز الكرة (٥ ، -٤ ، -٢) وطول نصف قطرها ٥ وحدات طول.

∴ مساحة سطحها = ٤ π نق^٢ = ٤ × π × ٢٥ = ١٠٠ π وحدة مربعة.

② ∵ المعادلة على الصورة القياسية.

∴ مركز الكرة هى نقطة الأصل (٠ ، ٠ ، ٠) وطول نصف قطرها ٤ وحدات طول.

∴ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} = $\frac{٤}{٣}$ π × ٤^{٣} = $\frac{٢٥٦}{٣}$ π وحدة حجم.

مثال ٩

عين مركز وطول نصف قطر الكرة التى معادلتها :

س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢ س − ٤ ص + ٦ ع + ١٢ = ٠

الحـل

∵ معادلة الكرة هى : س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢ س − ٤ ص + ٦ ع + ١٢ = ٠

∴ مركز الكرة (−١ ، ٢ ، −٣)

، طول نصف قطرها نق = $\sqrt{(−١)^{٢} + (٢)^{٢} + (−٣)^{٢} − ١٢}$ = $\sqrt{٢}$ وحدة طول.

حل آخر : نكتب المعادلة على الصورة القياسية وذلك باستخدام إكمال المربع.

(س^{٢} + ٢ س + ①) + (ص^{٢} − ٤ ص + ④)

+ (ع^{٢} + ٦ ع + ⑨) − (① + ④ + ⑨) + ١٢ = ٠

∴ (س + ١)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} + (ع + ٣)^{٢} = ٢

وهى الصورة القياسية لمعادلة الكرة.

∴ مركز الكرة (−١ ، ٢ ، −٣) وطول نصف قطرها $\sqrt{٢}$ وحدة طول.

تذكر أن :
لجعل المقدار س^{٢} + ب س مقدار ثلاثى مربع كامل نضيف إليه مربع نصف معامل س أى $\left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢}$

ملاحظات

فى المعادلة العامة للكرة يكون :

* معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = معامل ع^{٢} ≠ صفر
* ل^{٢} + ك^{٢} + ن^{٢} − د > صفر
* المعادلة خالية من الحدود التى تشتمل على س ص أ، ص ع أ، س ع

الكرة التى مركزها نقطة الأصل والنقطة (أ ، ب ، حـ) تقع عليها

* يكون طول نصف قطرها نق = $\sqrt{أ^2 + ب^2 + حـ^2}$

* تكون معادلتها فى الصورة القياسية : $س^2 + ص^2 + ع^2 = أ^2 + ب^2 + حـ^2$

مثال ١٠

أوجد الصورة القياسية لمعادلة الكرة التى مركزها نقطة الأصل والنقطة (٥ ، – ٢ ، ٣) تقع عليها.

الحل

المعادلة هى : $س^2 + ص^2 + ع^2 = ٥^2 + (-٢)^2 + ٣^2$

∴ $س^2 + ص^2 + ع^2 = ٣٨$

الكرة التى يقع مركزها على أحد المحاور وتمس المستوى المار بالمحورين الآخرين

* إذا كان المركز يقع على المحور س والكرة تمس المستوى ص ع
فإن إحداثيات المركز (أ ، ٠ ، ٠) وطول نصف القطر = |أ|

* إذا كان المركز يقع على المحور ص والكرة تمس المستوى س ع
فإن إحداثيات المركز (٠ ، ب ، ٠) وطول نصف القطر = |ب|

* إذا كان المركز يقع على المحور ع والكرة تمس المستوى س ص
فإن إحداثيات المركز (٠ ، ٠ ، حـ) وطول نصف القطر = |حـ|

مثال ١١

أوجد معادلة الكرة التى يقع مركزها على المحور ص وتمس المستوى س ع ومركزها يبعُد عنه ٤ وحدات طولية.

الحل

● طول نصف قطر الكرة = ٤ وحدات طولية.

● مركز الكرة : إما (٠ ، ٤ ، ٠) أ، (٠ ، –٤ ، ٠)

∴ هناك كرتان معادلتاهما :

$س^2 + (ص - ٤)^2 + ع^2 = ١٦$ أ، $س^2 + (ص + ٤)^2 + ع^2 = ١٦$

الكرة التى مركزها النقطة (أ ، ب ، حـ) وتمس أحد مستويات الإحداثيات

* إذا كانت تمس المستوى س ص فإن طول نصف قطرها | حـ |
* إذا كانت تمس المستوى س ع فإن طول نصف قطرها | ب |
* إذا كانت تمس المستوى ص ع فإن طول نصف قطرها | أ |

مثال ١٢

أوجد معادلة الكرة التى مركزها (−٥ ، ١ ، −٢) وتمس المستوى الإحداثى س ص

الحـــل

∵ الكرة مركزها (−٥ ، ١ ، −٢) وتمس المستوى س ص

∴ نق = | −٢ | = ٢ وحدة طول.

∴ معادلة الكرة هى : (س + ٥)^{٢} + (ص − ١)^{٢} + (ع + ٢)^{٢} = ٤

الكرة التى تمس مستويات الإحداثيات وطول نصف قطرها نق

* يكون مركزها هو النقطة (± نق ، ± نق ، ± نق)

مثال ١٣

أوجد معادلة الكرة التى تمس مستويات الإحداثيات وإحداثيات مركزها موجبة وطول نصف قطرها ٣ وحدات طول.

الحـــل

مركز الكرة هو النقطة (٣ ، ٣ ، ٣) ، نق = ٣

∴ معادلة الكرة هى : (س − ٣)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} + (ع − ٣)^{٢} = ٩

ملاحظة

إذا كانت : م ، ن كرتين طولا نصفى قطريهما $نق_{١}$ ، $نق_{٢}$ على الترتيب (حيث $نق_{١} > نق_{٢}$)

إذا كانت الكرتان م ، ن	فإن
(١) متباعدتين	$م ن > نق_{١} + نق_{٢}$
(٢) متماستين من الخارج	$م ن = نق_{١} + نق_{٢}$
(٣) متقاطعتين	$نق_{١} - نق_{٢} < م ن < نق_{١} + نق_{٢}$
(٤) متماستين من الداخل	$م ن = نق_{١} - نق_{٢}$
(٥) إحداهما بداخل الأخرى	$م ن < نق_{١} - نق_{٢}$
(٦) متحدتى المركز	$م ن =$ صفر

مثال ١٤

إذا كانت الكرتان : $(س - ٣)^{٢} + (ص - ١)^{٢} + (ع - ٢)^{٢} = ١٠٠$

، $(س + ١)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} + (ع - ك)^{٢} = ٩$ متماستين **أوجد :** ك

الحل

بالنسبة للكرة الأولى : مركزها $م_{١} = (٣ ، ١ ، ٢)$ ، طول نصف قطرها ١٠ وحدات طولية.

بالنسبة للكرة الثانية : مركزها $م_{٢} = (-١ ، ٤ ، ك)$ ، طول نصف قطرها ٣ وحدات طولية.

، $م_{١}م_{٢} = \sqrt{(٣ + ١)^{٢} + (١ - ٤)^{٢} + (٢ - ك)^{٢}} = \sqrt{٢٥ + (٢ - ك)^{٢}}$

، ∵ الكرتين متماستان.

∴ إما $م_{١}م_{٢} = ١٠ + ٣ = ١٣$ (متماستان من الخارج)

∴ $\sqrt{٢٥ + (٢ - ك)^{٢}} = ١٣$ ∴ $٢٥ + (٢ - ك)^{٢} = ١٦٩$

∴ $(٢ - ك)^{٢} = ١٤٤$ ∴ $٢ - ك = \pm ١٢$

∴ ك = ١٤ أ ، −١٠

أ، $م_١ م_٢ = ١٠ - ٣ = ٧$ (متماستان من الداخل)

$\therefore \sqrt{٢٥ + (٢ - ك)^٢} = ٧$ $\qquad$ $\therefore ٢٥ + (٢ - ك)^٢ = ٤٩$

$\therefore (٢ - ك)^٢ = ٢٤$ $\qquad$ $\therefore ٢ - ك = \pm ٢\sqrt{٦}$

$\therefore ك = ٢ + ٢\sqrt{٦}$ أو $٢ - ٢\sqrt{٦}$

مثال ١٥

أوجد معادلة الكرة التى تمس الأجزاء الموجبة من محاور الإحداثيات وطول قطرها $١٠\sqrt{٢}$ وحدة طولية.

الحل

نفرض أن مركز الكرة (أ ، ب ، حـ)

$\therefore$ نق $= \frac{١٠\sqrt{٢}}{٢} = ٥\sqrt{٢}$ وحدة طولية.

، $\because$ الكرة تمس الأجزاء الموجبة من محاور الإحداثيات.

$\therefore$ أ = ب = حـ $= \frac{٥\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = ٥$

$\therefore$ مركز الكرة = (٥ ، ٥ ، ٥)

$\therefore$ معادلة الكرة هى :

$(س - ٥)^٢ + (ص - ٥)^٢ + (ع - ٥)^٢ = ٥٠$

لاحظ أنه

الكرة التى مركزها (أ ، ب ، حـ) وتمس محاور الإحداثيات الثلاثة ، طول نصف قطرها نق يكون :

* بعد المركز عن محور س $= \sqrt{ب^٢ + حـ^٢} =$ نق
* بعد المركز عن محور ص $= \sqrt{أ^٢ + حـ^٢} =$ نق
* بعد المركز عن محور ع $= \sqrt{أ^٢ + ب^٢} =$ نق

$\therefore \sqrt{أ^٢ + ب^٢} = \sqrt{أ^٢ + حـ^٢} = \sqrt{ب^٢ + حـ^٢}$

ومنها نجد أن :

$|أ| = |ب| = |حـ|$ ، نق $= |أ|\sqrt{٢}$

مثال ١٦

أوجد معادلة أصغر كرة تمر بالنقط (٥ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ٥ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ٥)

الحل

∵ النقط (٥ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ٥ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ٥)

هى رؤوس مثلث متساوى الأضلاع

طول ضلعه = $٥\sqrt{٢}$

∴ نصف قطر الدائرة المارة

بهذه النقط = $\frac{٥\sqrt{٢}}{٢ \text{ جا } ٦٠^\circ} = \frac{٥\sqrt{٦}}{٣}$

، مركزها $\left(\frac{٥}{٣} ، \frac{٥}{٣} ، \frac{٥}{٣}\right)$

∴ معادلة أصغر كرة هى :

$\left(\text{س} - \frac{٥}{٣}\right)^٢ + \left(\text{ص} - \frac{٥}{٣}\right)^٢ + \left(\text{ع} - \frac{٥}{٣}\right)^٢ = \frac{٥٠}{٣}$

لاحظ أنه

لكى تحصل على أصغر كرة تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة فإن هذه النقط لابد وأن تقع على أكبر دائرة على الكرة ويكون لها نفس مركز الكرة ونفس نصف قطرها

وإذا كونت النقاط الثلاثة مثلثًا متساوى الأضلاع ولتكن رؤوسه (أ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، أ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، أ)

∴ المركز = $\left(\frac{\text{أ}+٠+٠}{٣} ، \frac{٠+\text{أ}+٠}{٣} ، \frac{٠+٠+\text{أ}}{٣}\right) = \left(\frac{\text{أ}}{٣} ، \frac{\text{أ}}{٣} ، \frac{\text{أ}}{٣}\right)$ وطول ضلع المثلث = $|\text{أ}|\sqrt{٢}$

∴ طول نصف قطر الدائرة = $\frac{|\text{أ}|\sqrt{٢}}{٢ \text{ جا } ٦٠^\circ} = \frac{|\text{أ}|\sqrt{٦}}{٣}$



تمارين 1

على النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد

من أسئلة الكتاب المدرسى ● فهم ○ تطبيق ● مستويات عليا

أولاً تمارين على النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد

١ عين موضع كل من النقطتين الآتيتين باستخدام نظام إحداثى متعامد ثلاثى الأبعاد :

(١) أ (٣ ، ٤ ، ٥) (٢) ب (−٣ ، ٢ ، ٥)

---

٢ أوجد أب فى كل مما يأتى إذا كان :

(١) أ (٧ ، ٠ ، ٤) ، ب (١ ، ٠ ، ٠) (٢) أ (٤ ، ١ ، ٩) ، ب (٢ ، ١ ، ٦)

(٣) أ (١ ، ١ ، −٧) ، ب (−٢ ، −٣ ، −٧) «$٢\sqrt{١٣}$ ، $\sqrt{١٣}$ ، ٥»

---

٣ أوجد إحداثيات نقطة منتصف $\overline{أب}$ حيث :

(١) أ (١ ، −٣ ، ٢) ، ب (٤ ، −١ ، ٤) (٢) أ (−٣ ، ٥ ، ٥) ، ب (−٦ ، ٤ ، ٨)

---

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) النقطة أ (٢ ، −٣ ، ٠) تقع ....

(أ) على المحور ع (ب) فى المستوى ص ع

(جـ) فى المستوى س ص (د) على المحور س

(٢) النقطة (٢ ، ٠ ، ٠) تقع ....

(أ) على محور ص (ب) على محور ع

(جـ) على محور س (د) فى المستوى ص ع

(٣) بُعد النقطة أ (٢ ، −٣ ، ٥) عن المستوى الإحداثى س ع يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) ٥

(٤) البُعد بين النقطة (أ ، ب ، حـ) ومحور ص يساوى ....

(أ) $\sqrt{أ^٢ + حـ^٢}$ (ب) $\sqrt{أ^٢ + ب^٢}$ (جـ) $\sqrt{ب^٢ + حـ^٢}$ (د) $\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + حـ^٢}$

(٥) طول العمود المرسوم من النقطة (−٥ ، −٣ ، ٤) على محور س = ... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ١٠

(٦) إذا كانت النقطة (س ، ص ، ع) تقع فى المستوى الإحداثى س ع فإن ....

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠ (جـ) ع = ٠ (د) س + ص = ٠

(٧) مستويا الإحداثيات س ص ، ص ع يتقاطعان فى ....

(أ) نقطة الأصل. (ب) محور س (جـ) محور ص (د) محور ع

(٨) مستويات الإحداثيات س ص ، س ع ، ص ع تتقاطع معًا فى ....

(أ) نقطة الأصل. (ب) محور س (جـ) محور ص (د) محور ع

(٩) المستقيمان $\overleftrightarrow{س س}$ ، $\overleftrightarrow{ع ع}$ يكونان مستوى الإحداثيات الذى معادلته ....

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠ (جـ) ع = ٠ (د) ص = ٢

(١٠) معادلة محور ع فى الفراغ هى ....

(أ) س = ٠ ، ص = ٠ (ب) س = ٠ ، ع = ٠

(جـ) ص = ٠ ، ع = ٠ (د) س = ٠

(١١) إحداثيات نقطة منتصف القطعة $\overline{ءهـ}$ حيث ء (٢ ، ٣ ، ٣) ، هـ (٦ ، −١ ، −٤) هى ....

(أ) (٤ ، ٢ ، $٣\frac{١}{٢}$) (ب) (٢ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$)

(جـ) (٤ ، ١ ، $-\frac{١}{٢}$) (د) (٤ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$)

(١٢) إذا كان : (أ ، ب ، جـ) منتصف $\overline{ءهـ}$ حيث ء (−٤ ، ٠ ، ٥) ، هـ (−٢ ، ٤ ، −١٣)

فإن : أ + ب + جـ = ...

(أ) −٥ (ب) −٦ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٣) إذا كانت نقطة منتصف $\overline{أب}$ تقع فى المستوى الإحداثى س ع وكانت :

أ (−٣ ، ١٢ + ك ، ٥) ، ب (١ ، ٣ ك ، −٢) فإن : ك = ...

(أ) ٥ (ب) −٣ (جـ) −٢ (د) ١

(١٤) إذا كان : أ (٧ ، −١ ، ٨) ، ب (١١ ، ٢ ، −٤)

فإن : طول $\overline{أب}$ = ... وحدة طول.

(أ) ١٠ (ب) ١١ (جـ) ١٢ (د) ١٣

(١٥) النقطة (٢ ، ٠ ، −٣) تقع فى مستوى الإحداثيات الذى معادلته ....

(أ) ع = ٠ (ب) ص = ٠ (جـ) س = ٠ (د) س + ص = −١

(١٦) إذا كانت النقطة (٢ أ ، أ + ٣ ، ٥) تقع فى مستوى الإحداثيات س ع فإن بُعدها عن المستوى الإحداثى ص ع يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) صفر

(١٧) إذا كانت النقطة (أ − ٢ ، ٥ ، أ − ٤) تُبعد عن المستوى ص ع خمسة وحدات طولية وتُبعد عن المستوى س ص ثلاثة وحدات طولية فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ٧ أ، −٣

(١٨) إذا كانت : (٥ ، ٦ ، −٣) هى منتصف $\overline{\text{أب}}$ حيث أ (٣ ، −١ ، ٥)

فإن : ب = ...

(أ) (٤ ، $\frac{٥}{٢}$ ، ١) (ب) (٧ ، ١٣ ، −١١)

(جـ) (−٢ ، −٧ ، ٨) (د) (٣ ، ٢ ، ١٣)

(١٩) بُعد النقطة (−٣ ، ٤ ، ٥) عن نقطة الأصل = ... وحدة طول.

(أ) ٥ (ب) ٥ $\sqrt{٢}$ (جـ) ١٠ (د) ٢٥

(٢٠) إذا كان : أ (−٤ ، −٢ ، ٣) ، ب (١ ، ٢ ، ك) وكان طول $\overline{\text{أب}}$ = $\sqrt{٧٧}$

فإن : ك = ...

(أ) −٣ أ، ٦ (ب) −٣ أ، ١٢ (جـ) ٩ أ، ٦ (د) ٩ أ، −٣

(٢١) جميع نقط الفراغ التى على الصورة (س ، ٥ ، ع) تقع فى المستوى الذى معادلته ....

(أ) س = ٥ (ب) ص = ٥ (جـ) ع = ٠ (د) ص = ٠

(٢٢) إذا كانت النقط أ (٦ ، ٠ ، ٣) ، ب (٧ ، ١ ، ٧) ، حـ (٩ ، ٣ ، ١٥) تقع على استقامة واحدة فإن : أ تقسم $\overline{\text{ب حـ}}$ بنسبة ....

(أ) ٣ : ١ من الداخل. (ب) ١ : ٣ من الخارج.

(جـ) ٢ : ٣ من الداخل. (د) ١ : ٢ من الخارج.

(٢٣) إذا كانت النقطة (ك ، ٣ ، −٥) تقع على أبعاد متساوية من المحورين س ، ص

فإن : ك = ...

(أ) ± ٢ (ب) ± ٣ (جـ) ± ٤ (د) ± ٥

(٢٤) إذا كان منتصف $\overline{أب}$ ∈ محور س حيث أ (٢ ، ١٢ + ك ، ك) ، ب (٤ ، م ، ٨ − م)

فإن : ك − ٣ م = ...

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) −٢ (د) −١٠

(٢٥) النقطة أ (٣ ، −٥ ، ١) فى الفراغ فإن مجموع أبعادها عن مستويات الإحداثيات الثلاثة = ... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٩ (د) ٣٥

(٢٦) صورة النقطة (−٢ ، ٣ ، ٤) بالانعكاس فى محور ع هى ....

(أ) (−٢ ، ٣ ، ٤) (ب) (٢ ، ٣ ، ٤)

(جـ) (٢ ، −٣ ، −٤) (د) (٢ ، −٣ ، ٤)

(٢٧) إذا كان : م (١ ، ٢ ، ٣) ، ن (٤ ، ٢ ، ٣) ، هـ (١ ، ٦ ، ٣) إحداثيات نقط منتصفات كل من $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{حـأ}$ على الترتيب فإن محيط Δ أ ب حـ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١٢ (ب) ١٣ (جـ) ١٤ (د) ٢٤

(٢٨) (دور أول ٢٠٢٢) إذا كانت أ (٢ ، −٥ ، ٧) ، ب (١ ، ٣ ، ٦) ، نقطة حـ تنتمى إلى محور الصادات ، فإذا كانت النقطة حـ على بعدين متساويين من أ ، ب

فإن النقطة حـ هى ....

(أ) (٠ ، ٢ ، ٠) (ب) (٠ ، ١ ، ٠) (جـ) (٠ ، −٢ ، ٠) (د) (٠ ، −١ ، ٠)

(٢٩) (دور ثان ٢٠٢٢) إذا كانت أ ، ب ، حـ ثلاث نقاط فى الفراغ حيث أ (٣ ، ٤ ، ٨) ، ب (١ ، ٢ ، ٧) ، حـ (٣ ، صفر ، ٦) فإن : ....

(أ) ٢ أب = ب حـ (ب) أب = ٢ ب حـ

(جـ) أب = ب حـ (د) ٣ أب = ب حـ

(٣٠) إذا كانت ل ، م ، ن هى مساقط النقطة أ (٣ ، ٤ ، ٥) على المحاور س ، ص ، ع على الترتيب فإن : م = ...

(أ) (٣ ، ٠ ، ٥) (ب) (٠ ، ٤ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٤ ، ٥) (د) (٠ ، -٤ ، ٠)

(٣١) إذا كانت : ل ، م ، ن هى مساقط النقطة أ (٣ ، ٤ ، ٥) على المستويات س ص ، ص ع ، س ع على الترتيب فإن : ل = ...

(أ) (-٣ ، -٤ ، ٠) (ب) (٠ ، ٤ ، ٥)

(جـ) (٣ ، ٤ ، ٠) (د) (٣ ، ٠ ، ٠)

(٣٢) إذا كانت النقطة هـ على أبعاد متساوية من النقط : و (٠ ، ٠ ، ٠) ، أ (ل ، ٠ ، ٠) ، ب (٠ ، م ، ٠) ، حـ (٠ ، ٠ ، ن) فإن النقطة هـ = ...

(أ) (ل ، م ، ن) (ب) $\left(\frac{-ل}{٢} ، \frac{-م}{٢} ، \frac{-ن}{٢}\right)$

(جـ) (-ل ، -م ، -ن) (د) $\left(\frac{ل}{٢} ، \frac{م}{٢} ، \frac{ن}{٢}\right)$

(٣٣) النقطة التى تقع على محور الصادات وتبعد مسافة $\sqrt{١٠}$ وحدة طول عن النقطة (١ ، ٢ ، ٣) هى ....

(أ) (٠ ، -٢ ، ٠) (ب) (٠ ، ٢ ، ٠)

(جـ) (٠ ، ٤ ، ٠) (د) (٠ ، -٤ ، ٠)

(٣٤) إذا كانت أ (٦ ، -٢ ، ٤) ، ب (٢ ، ٤ ، -٨) ، حـ (-٢ ، ٢ ، ٤) هى ثلاث رؤوس متتالية لمتوازى الأضلاع أ ب حـ ء فإن : ء = ...

(أ) $\left(٢ ، \frac{٤}{٣} ، ٠\right)$ (ب) (-٢ ، ٤ ، -١٦)

(جـ) (٢ ، -٤ ، ١٦) (د) (١ ، -٢ ، ٨)

(٣٥) (دورثان ٢٠٢١) إذا كان : أ ب حـ مثلث فيه النقطة ء منتصف $\overline{بحـ}$ ، أ (٣ ، ١ ، ٥) ، ب (٢ ، ٣ ، ٧) ، حـ (٠ ، ٣ ، ١) فإن طول $\overline{أء}$ = ... وحدة طول.

(أ) ٩ (ب) ٢ (جـ) ٧ (د) ٣

٣٦ (تجريبي ٢٠٢١) إذا كانت : أ (٣ ، -٤ ، ٠) ، ب (١٥ ، ٠ ، ٢)
، حـ (٠ ، -٨ ، ٤) ثلاث نقط في الفراغ وهي رؤوس المثلث أ ب حـ فإن بعد المركز الهندسي للمثلث عن المستوى الإحداثي س ع يكون ....

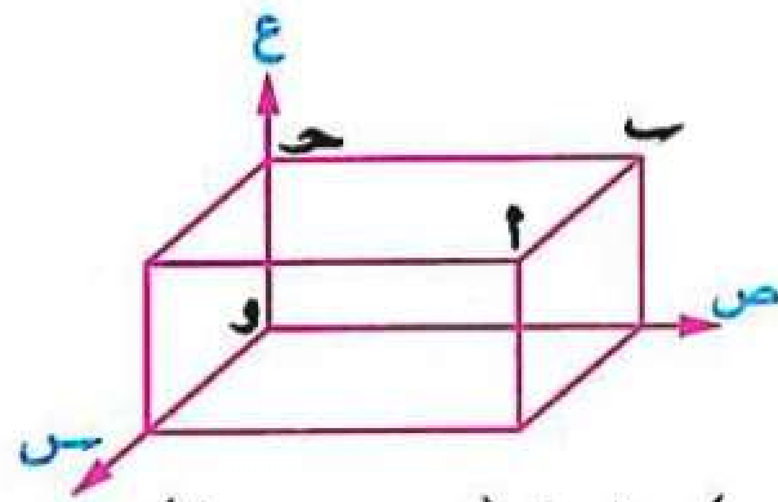
(أ) أكبر من بعده عن المستوى س ص

(ب) أصغر من أو يساوي بعده عن المستوى س ص

(جـ) أكبر من بعده عن المستوى ص ع

(د) أكبر من أو يساوي بعده عن المستوى ص ع

٣٧ الشكل المقابل يمثل متوازي مستطيلات :



أ (٥ ، ٨ ، ٤) فإن :

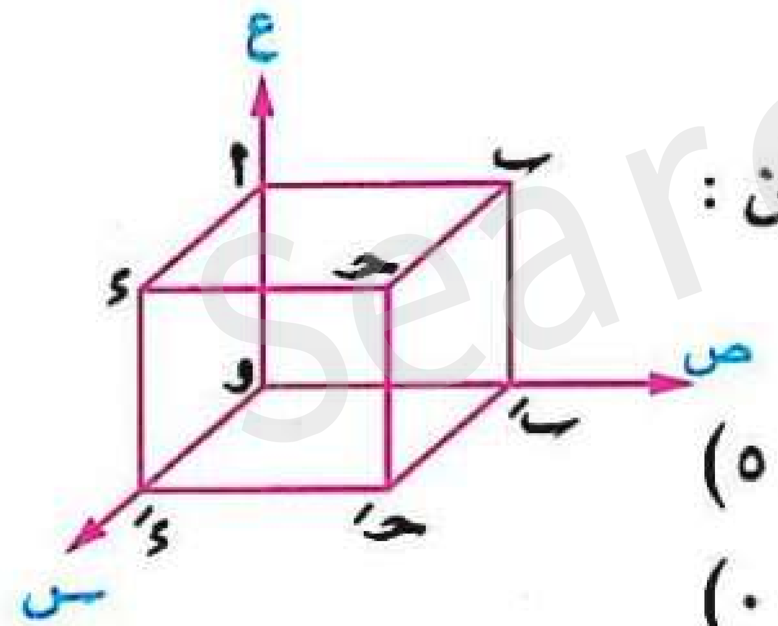
أولًا : النقطة ب هي ....

(أ) (٤ ، ٨ ، ٠) (ب) (٠ ، ٨ ، ٤) (جـ) (٥ ، ٨ ، ٠) (د) (٥ ، ٠ ، ٤)

ثانيًا : النقطة حـ هي ....

(أ) (٠ ، ٠ ، ٠) (ب) (٠ ، ٠ ، ٤) (جـ) (٥ ، ٠ ، ٤) (د) (٠ ، ٨ ، ٠)

٣٨ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء و بَ حـَ ءَ مكعب طول حرفه ٥ وحدات طول فإن :

أولًا : النقطة حـ هي ....

(أ) (٥ ، ٥ ، ٠) (ب) (٥ ، ٥ ، ٥)

(جـ) (٠ ، ٠ ، ٥) (د) (٠ ، ٥ ، ٠)

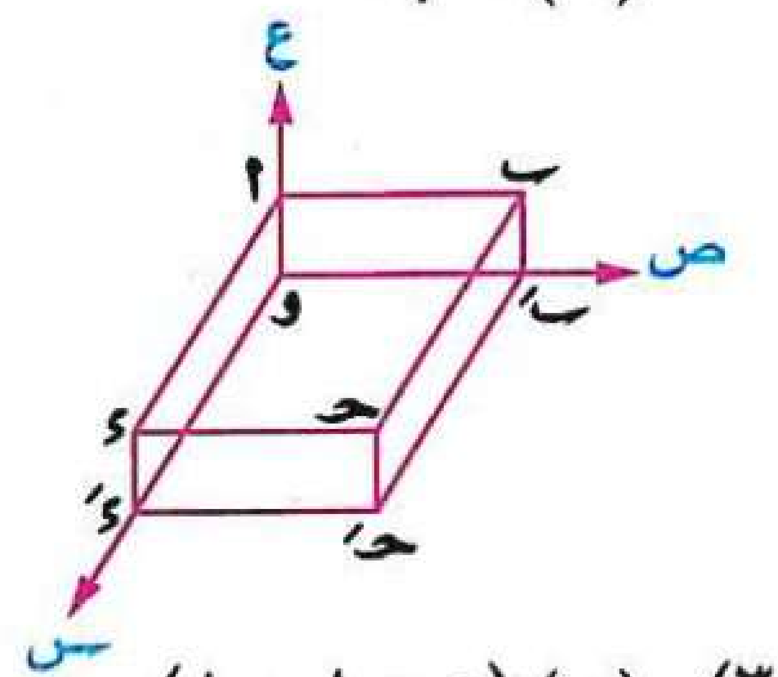
ثانيًا : النقطة ءَ هي ....

(أ) (٠ ، ٠ ، ٥) (ب) (٥ ، ٥ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٥ ، ٥) (د) (٥ ، ٠ ، ٠)

ثالثًا : طول قطر المكعب = ... وحدة طول.

(أ) ٥ $\sqrt{2}$ (ب) ٥ $\sqrt{3}$ (جـ) ٥ (د) ٥ $\sqrt{6}$

٣٩ في الشكل المقابل :



متوازي مستطيلات فيه :

حـَ (٥ ، ٨ ، ٠) ، ء (٥ ، ٠ ، ٣) فإن :

أولًا : نقطة حـ ....

(أ) (٥ ، ٨ ، ٠) (ب) (٥ ، ٣ ، ٨) (جـ) (٥ ، ٨ ، ٣) (د) (٥ ، ٨ ، ٨)

ثانيًا : حجم متوازى المستطيلات .... وحدة مكعبة.

(أ) ٦٤ (ب) ١٢٠ (جـ) ١٤٤ (د) ١٥٠

ثالثًا : معادلة المستوى و بَ حَ ءَ هى ....

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠ (جـ) ع = ٠ (د) ع = ٣

رابعًا : معادلة المستوى ء ءَ حَ حـ هى ....

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠ (جـ) س = ٥ (د) ع = ٣

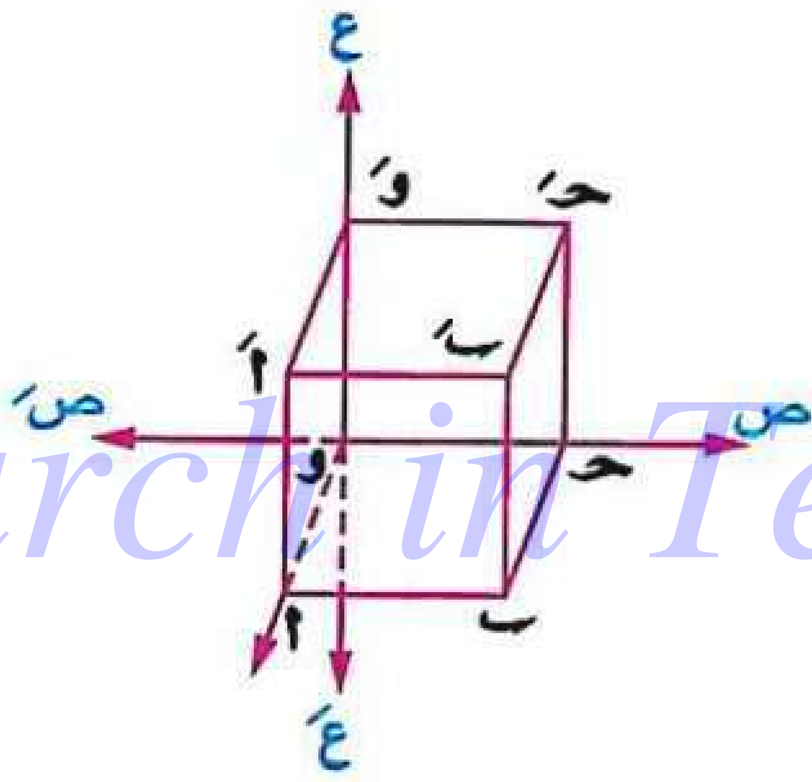
---

٥ الشكل المقابل يمثل مكعبًا

حجمه ٢٧ وحدة مكعبة أحد

رؤوسه ينطبق على نقطة الأصل

أوجد إحداثيات باقى الرؤوس.



---

٦ أوجد إحداثيات النقطة أ فى كل من الحالات الآتية :

① أ (١ – ك ، ٢ ك ، ٣ + ك) تقع فى المستوى س ص

② أ (٠ ، م – ٣ ، م + ٤) تقع على المحور ع

③ أ (ن – ١ ، ن + ٤ ، ٥ ن) تقع فى المستوى ص = ٥

④ أ (ل + ٥ ، ٢ ل ، ل) تبُعد ٢ $\sqrt{٥}$ وحدة طولية عن المحور س

⑤ أ (م ، ٢ م – ن ، م + ن + ٣) ∈ محور س

---

٧ أثبت أن : النقط أ (٧ ، ١ ، ٤) ، ب (٨ ، ٢ ، ٨) ، حـ (١٠ ، ٤ ، ١٦)

تقع على استقامة واحدة.

---

٨ أثبت أن : النقط أ (١ ، ٢ ، ٥) ، ب (٢ ، ٥ ، ٣) ، حـ (–١ ، ٣ ، ٢)

هى رؤوس مثلث متساوى الأضلاع وأوجد مساحته. « $\frac{٧\sqrt{٣}}{٢}$ وحدة مربعة »

٩ أثبت أن : النقط أ (٢ ، –١ ، ٣) ، ب (–٤ ، ٤ ، ٢) ، ح (–٢ ، ٥ ، ١)
هى رؤوس مثلث قائم وأوجد مساحته. «٢ √٢١ وحدة مربعة»

---

١٠ أثبت أن : المثلث الذى رؤوسه النقط أ (٧ ، ١ ، ٣) ، ب (٥ ، ٣ ، ٤)
، ح (٣ ، ٥ ، ٣) هو مثلث متساوى الساقين.

---

١١ أثبت أن : النقط أ (٥ ، ١ ، ٣) ، ب (٧ ، ٣ ، ك) ، ح (٥ ، ٥ ، ٣)
تكون مثلثاً متساوى الساقين لجميع قيم ك الحقيقية ، ثم أوجد : قيم ك الحقيقية التى
تجعل المثلث متساوى الأضلاع. «٣ ± ٢ √٢»

---

١٢ إذا كانت : ح (–١ ، ٤ ، ٠) منتصف القطعة المستقيمة أب حيث ب (٤ ، –٢ ، ١)
أوجد : إحداثيات النقطة أ «(–٦ ، ١٠ ، –١)»

---

١٣ إذا كانت : ح (–١ ، ٦ ، –٥) منتصف أب حيث أ (ك – ٢ ، –١ ، م + ٣)
، ب (٢ ، ن – ٧ ، –٢) **فأوجد قيمة :** ك + م – ن «–٣٣»

---

١٤ أوجد محيط المثلث الناتج من توصيل منتصفات أضلاع Δ أب ح حيث :
أ (٢ ، ٥ ، –١) ، ب (٦ ، –٣ ، ٣) ، ح (–٤ ، ٧ ، ١) «١٥,٤»

---

١٥ إذا كانت : أ ∈ محور س ، ب ∈ محور ص ، ح ∈ محور ع
وكانت النقطة (١ ، –١ ، صفر) منتصف أب ، والنقطة (٠ ، –١ ، ٢) منتصف ب ح
أوجد : إحداثيات منتصف أ ح

---

١٦ إذا كان : أ ، ب ، ح ، ء أربعة نقاط فى مستوى واحد أثبت أن :

① أ (٠ ، ٤ ، ١) ، ب (٢ ، ٣ ، –١) ، ح (٤ ، ٥ ، ٠) ، ء (٢ ، ٦ ، ٢)
هى رؤوس مربع.

② أ (٥ ، –١ ، ١) ، ب (٧ ، –٤ ، ٧) ، ح (١ ، –٦ ، ١٠) ، ء (–١ ، –٣ ، ٤)
هى رؤوس معين.

17 إذا كانت : ء ، هـ ، و هى منتصفات أضلاع $\triangle$ أ ب حـ وهى $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{أحـ}$ على الترتيب حيث : ء (١ ، ٢ ، ٦) ، هـ (٠ ، ٣ ، ٢) ، و (٢ ، ٠ ، −٢)

أوجد : إحداثيات رؤوس $\triangle$ أ ب حـ

ثانيا تمارين على معادلة الكرة

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) معادلة الكرة التى مركزها (٢ ، −٣ ، ٥) وطول نصف قطرها ٢ $\sqrt{5}$ وحدة طول هى ....

(أ) (س + ٢)^2 + (ص − ٣)^2 + (ع + ٥)^2 = ٢ $\sqrt{5}$

(ب) س^2 + ص^2 + ع^2 = ٢٠

(جـ) (س − ٢)^2 + (ص + ٣)^2 + (ع − ٥)^2 = ٢٠

(د) (س − ٢)^2 + (ص + ٣)^2 + (ع − ٥)^2 = ٢ $\sqrt{5}$

(٢) معادلة الكرة التى مركزها (−٢ ، ١ ، −٤) وطول نصف قطرها ٢٥ هى ....

(أ) (س + ٢)^2 + (ص − ١)^2 + (ع + ٤)^2 = ٥

(ب) (س − ٢)^2 + (ص + ١)^2 + (ع − ٤)^2 = ٦٢٥

(جـ) س^2 + ص^2 + ع^2 + ٤ س − ٢ ص + ٨ ع − ٦٢٥ = ٠

(د) س^2 + ص^2 + ع^2 + ٤ س − ٢ ص + ٨ ع − ٦٠٤ = ٠

(٣) معادلة الكرة التى مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٣ وحدات هى ....

(أ) س^2 + ص^2 + ع^2 = ٣

(ب) س^2 + ص^2 + ع^2 = ٩

(جـ) (س − ٣)^2 + (ص − ٣)^2 + (ع − ٣)^2 = ٩

(د) س^2 + ص^2 + ع^2 + ٩ = ٠

④ معادلة الكرة التى مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (٣ ، −١ ، ٢) هى ....

(أ) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٤

(ب) (س − ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع − ٢)^{٢} = ١٤

(جـ) (س − ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع − ٢)^{٢} = $\sqrt{١٤}$

(د) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ١٤

⑤ (دور أول ٢٠١٨) معادلة الكرة التى مركزها النقطة (٢ ، −٣ ، ٤) وتمس المستوى الإحداثى س ص هى ....

(أ) (س − ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع − ٤)^{٢} = ٤

(ب) (س − ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع − ٤)^{٢} = ٩

(جـ) (س − ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع − ٤)^{٢} = ١٦

(د) (س + ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} + (ع + ٤)^{٢} = ١٦

⑥ مركز الكرة التى معادلتها : س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢ س − ٤ ص + ٦ ع − ١٦ = ٠ هو ....

(أ) (١ ، ١ ، ١)　　(ب) (٢ ، −٤ ، ٦)

(جـ) (−١ ، ٢ ، −٣)　　(د) (−٢ ، ٤ ، −٦)

⑦ النقطة أ = (٣ ، ٢ ، ١) تقع .... الكرة التى معادلتها : س^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع − ١)^{٢} = ٤

(أ) على　　(ب) داخل　　(جـ) خارج　　(د) فى مركز

⑧ (دور ثان ٢٠١٧) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٤ س − ٦ ص + ٨ ع + ٤ = ٠ . معادلة كرة طول قطرها = ... وحدة طول.

(أ) ٥　　(ب) ١٠　　(جـ) ١٥　　(د) ٢٠

⑨ إذا كانت $\overline{\text{أب}}$ قطر فى الكرة التى معادلتها (س − ٥)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} + (ع − ١)^{٢} = ١١ وكانت إحداثيات أ (٨ ، −١ ، ٢) فإن إحداثيات نقطة ب هى ....

(أ) (٥ ، −٢ ، ١)　　(ب) (١٠ ، −٤ ، ٥)

(جـ) (٢ ، −٣ ، ٠)　　(د) (١٠ ، ٣ ، ٦)

(١٠) معادلة الكرة التى مركزها نقطة الأصل وتقطع جزءًا طوله ٥ وحدات من الجزء الموجب للمحور س هى ....

(أ) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - ٢٥ = ٠$ (ب) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢٥ = ٠$

(جـ) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - ١٠٠ = ٠$ (د) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - \sqrt{٥} = ٠$

(١١) إذا كانت نقطة الأصل تقع على الكرة التى مركزها (−١ ، ٢ ، ٢) فإن معادلتها ....

(أ) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢س + ٤ص + ٤ع = -٣$

(ب) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢س - ٤ص - ٤ع = ٣$

(جـ) $(س + ١)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} + (ع - ٢)^{٢} + ٩ = ٠$

(د) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢س - ٤ص - ٤ع = ٠$

(١٢) معادلة الكرة التى مركزها النقطة (١ ، −٣ ، −١) وتمر بالنقطة (−٢ ، −١ ، −١) هى ....

(أ) $(س + ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع + ١)^{٢} = ١٣$

(ب) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - ٢س + ٦ص + ٢ع - ١٣ = ٠$

(جـ) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - ٢س + ٦ص + ٢ع = ٢$

(د) $(س - ١)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع + ١)^{٢} = \sqrt{١٣}$

(١٣) معادلة الكرة التى قطرها $\overline{أب}$ حيث أ (٧ ، ١ ، −٤) ، ب (٣ ، −١ ، ٢) هى ....

(أ) $(س - ٧)^{٢} + (ص - ١)^{٢} + (ع + ٤)^{٢} = ٢٨$

(ب) $(س - ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع - ٢)^{٢} = ١٤$

(جـ) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - ١٠س + ٢ع - ١٤ = ٠$

(د) $(س - ٥)^{٢} + (ع + ١)^{٢} + ص^{٢} = ١٤$

(١٤) طول نصف قطر الكرة التى معادلتها $(س - ٢)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} + (ع - ٥)^{٢} = ٦٤$ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٦٤ (ب) $٣\sqrt{٥}$ (جـ) ٨ (د) ٥

(١٥) مساحة الكرة التى معادلتها س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٢٥ = ٠ تساوى .... وحدة مساحة.

(أ) ٢٠ π　　(ب) ٤٠ π　　(جـ) ٢٥ π　　(د) ١٠٠ π

(١٦) حجم الكرة التى معادلتها س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٤ س − ٨ ص − ١٠ ع − ٣٦ = ٠ يساوى .... وحدة حجم.

(أ) ٣٢٤ π　　(ب) ٣٦ π　　(جـ) ٧٨٢ π　　(د) ٩٧٢ π

(١٧) إذا كانت النقطة (−٢ ، ٤ ، م) تقع على الكرة (س + ٢)^{٢} + (ص − ١)^{٢} + (ع − ٣)^{٢} = ٢٥　فإن : م = ...

(أ) ٧　　(ب) ٤　　(جـ) ٧ أ، −١　　(د) ٤ أ، −١

(١٨) (دور أول ٢٠٢١) إذا كانت النقطة (٧ ، −٢ ، ٢) تقع على سطح الكرة التى معادلتها (س − ٤)^{٢} + (ص − ١)^{٢} + (ع + ١)^{٢} = ك^{٢}　فإن : |ك| = ...

(أ) ٣　　(ب) ٣$\sqrt{٣}$　　(جـ) ٢٧　　(د) $\sqrt{٣}$

(١٩) معادلة الكرة التى مركزها (٢ ، −١ ، ٤) ومساحتها ١٠٠ π وحدة مربعة هى ....

(أ) (س + ٢)^{٢} + (ص − ١)^{٢} + (ع + ٤)^{٢} = ٢٥

(ب) (س − ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع − ٤)^{٢} = ٢٥

(جـ) (س − ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع − ٤)^{٢} = ١٠٠

(د) (س − ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع − ٤)^{٢} = ٥

(٢٠) مساحة أكبر دائرة مرسومة على سطح الكرة التى مركزها النقطة (٥ ، ٠ ، −١) وتمر بالنقطة (٧ ، ١ ، −٤) تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٢٥ π　　(ب) ٤٩ π　　(جـ) ١٦ π　　(د) ١٤ π

(٢١) معادلة كرة مركزها م (٤ ، −٦ ، −٥) ، وطول نصف قطرها ٢ وحدة طول هى س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + أ س + ب ص + جـ ع + د = ٠

فإن : أ + ب + جـ + د = ...

(أ) ١٨　　(ب) ٧٣　　(جـ) ٨٧　　(د) ٣٠٤

(٢٢) الكرة المحصورة بين المستويين ع = −١ ، ع = ٥ ومركزها (٢ ، −١ ، ك)
فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٣) مركز الكرة التى تمس مستويات الإحداثيات الموجبة وطول نصف قطرها ٥ وحدات
هو ....

(أ) (٠ ، ٠ ، ٠) (ب) (٥ ، ٥ ، ٥) (جـ) (٥ ، ٠ ، ٠) (د) (٠ ، ٥ ، ٥)

(٢٤) مركز الكرة $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٢ ع = ٠$ يقع ....

(أ) على المحور س (ب) فى المستوى ع = ٠
(جـ) على المحور ص (د) على المحور ع

(٢٥) إذا كانت : $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٢ س + ٤ ص - ٤ ع + ك = ٠$ معادلة كرة
فإن : ك يمكن أن تكون ....

(أ) ٩ (ب) ١٨ (جـ) ٥ (د) ١٠

(٢٦) الكرة $(س - ٣)^٢ + (ص + ٥)^٢ + (ع + ١)^٢ = ٢٥$ تمس ....

(أ) المحور س (ب) المستوى الإحداثى س ص
(جـ) المستوى الإحداثى س ع (د) المحور ص

(٢٧) أى مما يأتى يمثل معادلة كرة مركزها يقع على المحور ع وتمس المستوى الإحداثى
س ص ؟

(أ) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٢٥$ (ب) $س^٢ - ١٠ س + ص^٢ + ع^٢ = ٠$
(جـ) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ١٠ ع = ٢٥$ (د) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ١٠ ع = ٠$

(٢٨) كرة مركزها (٢ ، ٣ ، ٤) تمس محور السينات فإن معادلة الكرة ....

(أ) $(س - ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ + (ع - ٤)^٢ = ١٥$
(ب) $(س - ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ + (ع - ٤)^٢ = ٥$
(جـ) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٤ س - ٦ ص - ٨ ع + ٤ = ٠$
(د) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٢٥ = ٠$

(٢٩) إذا كانت : $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - ٤ ك س + ٤ ص - ٨ ع + ك = ٠$ معادلة كرة طول نصف قطرها ٥ وحدات طول فإن : ك = ...

(أ) $\frac{-٥}{٤}$ أ، ١ (ب) $\frac{٥}{٤}$ أ، −١ (جـ) $-\frac{١}{٤}$ أ، $\frac{٥}{٤}$ (د) ١ أ، −١

(٣٠) إذا كان محور الصادات يقطع الكرة التى مركزها (٣ ، −٤ ، ١٢) وطول نصف قطرها ١٣ سم فى النقطتين أ ، ب فإن : أب يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٣ (د) ٢٦

(٣١) الكرتان اللتان معادلاتهما : $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - ٢ س - ٢ ص + ٢ ع - ١ = ٠$ ، $(س - ٥)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} + ع^{٢} = ٤$ تكونان ....

(أ) متماستين من الخارج. (ب) متماستين من الداخل.

(جـ) متقاطعتين. (د) متباعدتين.

(٣٢) (دور أول ٢٠٢١) إذا كانت : $م_{١}$ ، $م_{٢}$ كرتين متماستين من الداخل ، وكان : $م_{١}$ (−٣ ، ٢ ، −٦ $\sqrt{٢}$) ، $نق_{١}$ = ٨ وحدة طول ، $م_{٢}$ (−٢ ، ١ ، −٥ $\sqrt{٢}$)

فإن : $نق_{٢}$ = ... وحدة طول ، حيث $نق_{١} > نق_{٢}$

(أ) ٥ (ب) ٢ (جـ) ٧ (د) ٦

(٣٣) أصغر مسافة بين النقطة (٣ ، ٥ ، ١) وسطح الكرة $(س - ١)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} + (ع + ٥)^{٢} = ٢٥$ تساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٧

(٣٤) (دور ثان ٢٠٢١) معادلة الكرة التى مركزها (−١ ، ٠ ، ٥) وحجمها ٣٦ π وحدة حجم هى ....

(أ) $(س + ١)^{٢} + ص^{٢} + (ع - ٥)^{٢} = ٣٦$

(ب) $(س - ١)^{٢} + ص^{٢} + (ع + ٥)^{٢} = ٦$

(جـ) $(س + ١)^{٢} + ص^{٢} + (ع - ٥)^{٢} = ٢٧$

(د) $(س + ١)^{٢} + ص^{٢} + (ع - ٥)^{٢} = ٩$

(٣٥) (تجريبي ٢٠٢٣) إذا كانت المعادلة الإحداثية لكرة هي :

(س + ٢)^{٢} + (ص − ١)^{٢} + (ع − ٣)^{٢} = ٩ فإن معادلتها الإحداثية بعد انتقال مقداره أربع وحدات في اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$ هي ....

(أ) (س + ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع − ٣)^{٢} = ٩

(ب) (س − ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع − ٣)^{٢} = ٤٩

(جـ) (س − ٤)^{٢} + (ص − ١)^{٢} + (ع + ٣)^{٢} = ٩

(د) (س + ٢)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} + (ع − ٣)^{٢} = ٤٩

(٣٦) (دور ثان ٢٠٢٢) معادلة الكرة التي تمر برؤوس المثلث أ ب حـ حيث أ (٦ ، ٠ ، ٠) ، ب (٠ ، ٦ ، ٠) ، حـ (٠ ، ٠ ، ٦) ، ومركزها هو نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب حـ هي ....

(أ) (س − ٢)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} + (ع − ٢)^{٢} = $\sqrt{٢٤}$

(ب) (س − ٣)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} + (ع − ٣)^{٢} = ٢٤

(جـ) (س − ٣)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} + (ع − ٣)^{٢} = $\sqrt{٢٤}$

(د) (س − ٢)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} + (ع − ٢)^{٢} = ٢٤

(٣٧) (دور أول ٢٠٢٢) كرتان متساويتان في الحجم ، إذا كانت معادلة الكرة الأولى :

س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٢ س جتا θ − ٢ ص جا θ − ٨ = ٠ ، ومركز الكرة الثانية هو (جتا θ ، جا θ ، ن) ويقع على سطح الكرة الأولى ، فإن معادلة الكرة الثانية هي .... (حيث ن ∈ ح$^{+}$ ، θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[)

(أ) (س − جتا θ)^{٢} + (ص − جا θ)^{٢} + (ع − ٣)^{٢} = ٨

(ب) (س − جتا θ)^{٢} + (ص − جا θ)^{٢} + ع^{٢} = ٩

(جـ) (س − جتا θ)^{٢} + (ص − جا θ)^{٢} + ع^{٢} = ٨

(د) (س − جتا θ)^{٢} + (ص − جا θ)^{٢} + (ع − ٣)^{٢} = ٩

(٣٨) (تجريبي ٢٠٢١) إذا كان أقصر بعد بين النقطة أ (٣ ، ٥ ، ١) وسطح كرة مركزها م (١ ، ٢ ، −٥) يساوي ٢ وحدة طول حيث أ تقع خارج الكرة فإن طول نصف قطر الكرة = ... وحدة طول.

(أ) ٥ (ب) ٢ (جـ) ٧ (د) ١٢

(٣٩) نقطة فى الفراغ ثلاثى الأبعاد تبعد عن كل من مستويات الإحداثيات الثلاثة نفس المسافة (أ) وحدة طول أى مما يأتى صحيح ؟

(أ) النقطة هى : (أ ، أ ، أ)

(ب) يوجد ٨ نقاط تحقق ذلك تقع على رؤوس مكعب حجمه (٨ أ^{٣}) وحدة مكعبة.

(جـ) هذه النقطة هى مركز الكرة التى تمس محاور الإحداثيات وطول نصف قطرها أ وحدة طول.

(د) جميع هذه النقط تقع على سطح كرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها أ وحدة طول.

(٤٠) كرة تمس المستويات س ص ، ص ع ، س ع وتمر بالنقطة (١ ، –٤ ، ٥) فإن طول نصف قطرها يمكن أن يكون .... وحدة طول.

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٩

---

٢ أوجد معادلة الكرة التى :

(١) مركزها النقطة (٢ ، –١ ، ٤) وطول نصف قطرها ٣ وحدات.

(٢) مركزها النقطة (٤ ، –٢ ، ٣) وطول قطرها ٢ $\sqrt{٥}$

(٣) مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها $\sqrt{٧}$ وحدة طول.

(٤) (٣ ، ٤ ، –٣) ، (٠ ، ٢ ، ١) نهايتا قطر فيها.

(٥) مركزها النقطة (١ ، –٦ ، ١) وتمر بالنقطة (٢ ، –١ ، ٥)

(٦) مركزها النقطة (–١ ، ٢ ، –٢) وتمر بنقطة الأصل.

(٧) مركزها النقطة (–٢ ، –٥ ، ٣) وتمس المستوى س ص

(٨) مركزها النقطة (٠ ، ٤ ، ٠) وتمس المستوى الإحداثى س ع

(٩) تكون متحدة المركز مع الكرة التى معادلتها :
س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} – ٦ س + ٢ ص – ٤ ع = ٢ وطول نصف قطرها ضعف نصف قطر الكرة المعطاة.

(١٠) طول نصف قطرها ٣ وحدات وتمس مستويات الإحداثيات علمًا بأن إحداثيات المركز موجبة.

---

٣ عين مركز وطول نصف قطر الكرة التى معادلتها :

(١) $(س - ٣)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} + (ع + ٢)^{٢} - ٢٥ =$ صفر وأوجد حجمها.

(٢) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ١٨$

(٣) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٤ س - ٢ ص - ٦ ع + ١١ = ٠$

(٤) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٦ ع$

(٥) $٣ س^{٢} + ٣ ص^{٢} + ٣ ع^{٢} - ٣ س - ٩ ص - ٦ ع + ٣ = ٠$ وأوجد مساحة سطحها.

(٦) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - ٢ س + ٤ ص = ٠$

---

٤ إذا كان : $\overline{أب}$ قطر فى الكرة التى معادلتها :

$س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - ٤ س + ٢ ص - ٦ ع - ٦٧ = ٠$ حيث أ $(-٦ ، ٣ ، ٢)$

أوجد : إحداثيات نقطة ب «(١٠ ، -٥ ، ٤)»

---

٥ متى تمثل المعادلة : $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + أ س + ب ص + حـ ع - ء = ٠$

معادلة كرة حيث أ ، ب ، حـ ، ء $\in$ ح ؟

---

٦ إذا كان : $(س - ٢)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} + (ع - ٢)^{٢} = ١$

، $(س + ٤)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} + (ع - ٢)^{٢} = ٤$ معادلتا كرتين

أوجد البُعد بين مركزى الكرتين وبيِّن أن الكرتين غير متقاطعتين. «١٠ وحدات»

---

٧ إذا كانت الكرتان $(س - ٣)^{٢} + ص^{٢} + (ع - ٣)^{٢} = ١٦$

، $(س + ١)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} + (ع - ك)^{٢} = ٢٥$ متماستين

فأوجد : قيمة ك «١٠ أو -٤»

٨ **أوجد معادلة الكرة التى :**

(١) يقع مركزها على المحور ع ويبعد ٣ وحدات عن المستوى الإحداثى س ص وطول نصف قطرها وحدتان طول.

(٢) تمس مستوى إحداثى ومركزها (٣ ، ٠ ، ٠)

(٣) مركزها (-٣ ، -٣ ، ٥) وتمس مستويات الإحداثيات س ع ، ص ع

(٤) مركزها النقطة (٣ ، -٢ ، ٤) وتمس المستوى الإحداثى الذى معادلته ع = ٣

(٥) تمر بالنقط أ (-٥ ، -٤ ، ١) ، ب (٣ ، ٤ ، -٥) ، حـ (٠ ، ٠ ، ٤) ، ء (٠ ، ٠ ، ٠)

(٦) تمس المستويات س ع ، س ص ، ص ع فى النقط أ ، ب ، حـ على الترتيب ، $\overline{\text{أ ء}}$ قطر فيها حيث ء (٣ ، ٦ ، ٣)

---

٩ إذا قطع المحور س الكرة (س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع - ١)^٢ = ١٤ فى النقطتين أ ، ب **أوجد :** طول $\overline{\text{أ ب}}$ «٤ وحدات»

---

١٠ أوجد معادلة الكرة التى يقع مركزها على المحور ص والتى تمر بالنقطتين (١ ، ٣ ، ٢) ، (-٢ ، ٤ ، ٢)

---

١١ أوجد معادلة الكرة التى يقع مركزها فى المستوى س ع والتى تمر بالنقاط أ (٠ ، ٨ ، ٠) ، ب (٤ ، ٦ ، ٢) ، حـ (٠ ، ١٢ ، ٤)

---

١٢ إذا كان محورا الإحداثيات س ، ص يقطعان الكرة التى معادلتها :

(س - ٣)^٢ + (ص + ٤)^٢ + (ع - ١٢)^٢ = ١٦٩

أوجد مساحة المقطع الناتج من الكرة والمستوى س ص «٢٥ π وحدة مربعة»

---

١٣ كرة مركزها (ل - ٢ ، م + ١ ، ٤) ، وطول نصف قطرها ٣ وحدات تمس المستويين س ع ، ص ع **أوجد قيم كل من :** ل ، م «٥ أو -١ ، ٢ أو -٤»

---

١٤ إذا كان مركز الكرة التى تمس محاور الإحداثيات هو (أ ، ٢ $\sqrt{٢}$ ، ٢ $\sqrt{٢}$) فأوجد قيمة أ ثم اكتب معادلة الكرة.

مسائل تقيس مهارات التفكير

١٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① معادلة الكرة التى مركزها (٣ ، م − ١ ، ٥) وتمس محورى الإحداثيات سـ ، ص هى ....

(أ) $سـ^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - ٣\,سـ - ٣\,ص + ٥\,ع = ٣٤$

(ب) $(سـ - ٣)^{٢} + (ص \pm ٣)^{٢} + (ع - ٥)^{٢} = ٣٤$

(جـ) $(سـ + ٣)^{٢} + (ص \pm ٣)^{٢} + (ع + ٥)^{٢} = ٣٤$

(د) $(سـ \pm ٣)^{٢} + (ص \pm ٣)^{٢} + (ع \pm ٥)^{٢} = ٣٤$

② نصف قطر أصغر كرة تقع عليها النقاط (٠ ، ٠ ، ٥) ، (٥ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ٥ ، ٠) هو .... وحدة طول.

(أ) ١٥ (ب) $\frac{٥\sqrt{٦}}{٣}$ (جـ) $٥\sqrt{٣}$ (د) ٥

③ نصف قطر أصغر كرة تمر بالنقط (٥ ، ٥ ، ٠) ، (٠ ، ٥ ، ٥) ، (٥ ، ٠ ، ٥) هو .... وحدة طول.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) $\frac{٥\sqrt{٦}}{٣}$ (د) $٥\sqrt{٢}$

④ عدد الكرات التى تمس محاور الإحداثيات الثلاثة وطول قطرها ١٦ وحدة هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

⑤ معادلة الكرة التى تمس محاور الإحداثيات الموجبة وطول قطرها ١٦ وحدة هى ....

(أ) $(سـ - ٤\sqrt{٢})^{٢} + (ص - ٤\sqrt{٢})^{٢} + (ع - ٤\sqrt{٢})^{٢} = ٦٤$

(ب) $سـ^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٨\sqrt{٢}\,سـ + ٨\sqrt{٢}\,ص + ٨\sqrt{٢}\,ع = ٦٤$

(جـ) $سـ^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٦٤$

(د) $(سـ - ٨)^{٢} + (ص - ٨)^{٢} + (ع - ٨)^{٢} = ٦٤$

⑥ كرة مركزها م موضوعة داخل مكعب طول حرفه من الداخل ١٠ سم بحيث تمس الكرة جميع أوجه المكعب ، باعتبار أحد رؤوس المكعب هى نقطة الأصل وأوجهه توازى مستويات الإحداثيات وإحداثيات المركز موجبة فإن معادلة الكرة هى ....

(أ) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - ٢٠ س - ٢٠ ص - ٢٠ ع + ٥٠ =$ صفر

(ب) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ١٠ س ص + ١٠ ص ع + ٥٠ =$ صفر

(جـ) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - ١٠ س - ١٠ ص - ١٠ ع + ٥٠ =$ صفر

(د) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ١٠ س - ١٠ ص - ١٠ ع + ٥٠ =$ صفر

⑦ معادلة الكرة التى مركزها نقطة الأصل وتمر برؤوس مكعب طول حرفه ١٢ سم هى ....

(أ) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ١٤٤$ (ب) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ١٠٨$

(جـ) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٣٦$ (د) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ١٠٨ = ٠$

⑧ إذا انتقلت الكرة $(س - ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع - ٣)^{٢} = ٩$ مسافة ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$ فإن معادلة الكرة تكون ....

(أ) $(س - ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع - ٣)^{٢} = ٩$

(ب) $(س - ٥)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع - ٣)^{٢} = ٩$

(جـ) $(س - ٢)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} + (ع - ٣)^{٢} = ٩$

(د) $(س - ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع - ٦)^{٢} = ٩$

⑨ إذا كانت النقط أ ، ب ، حـ هى نقط تقاطع الكرة $(س - ١)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} + (ع - ١)^{٢} = ٦$ مع المحورين $\overleftrightarrow{و س}$ ، $\overleftrightarrow{و ص}$ فإن مساحة المثلث أ ب حـ تساوى .... وحدة مربعة.

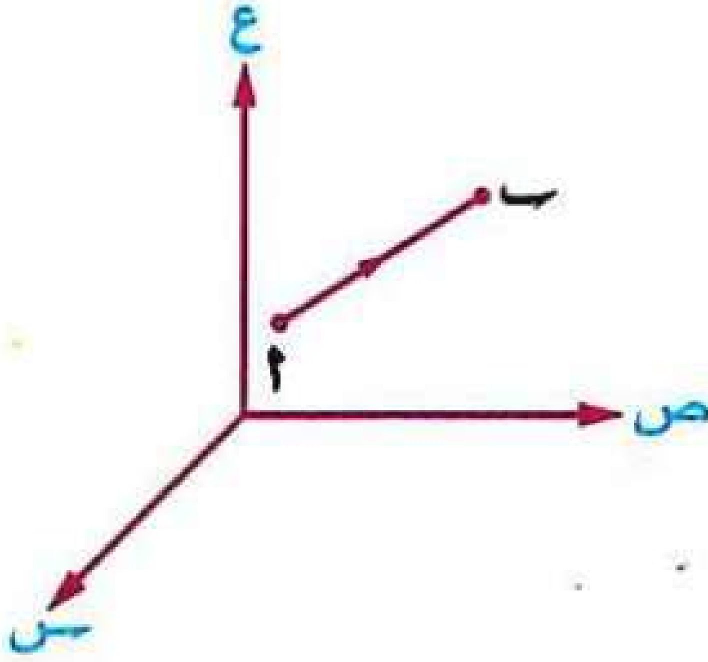
(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

⑩ كرة معادلتها : $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٧٥$ تمر برؤوس مكعب مرسوم داخلها فإن المساحة الكلية للمكعب = ... وحدة مربعة.

(أ) ١٢٥ (ب) ٦٠٠ (جـ) $٢٥ \sqrt{٣}$ (د) ٣٠٠

الدرس 2 المتجهات فى الفراغ

- **القطعة المستقيمة الموجهة :**



تحدد القطعة المستقيمة الموجهة بثلاثة عناصر:

(١) نقطة البداية.

(٢) نقطة النهاية.

(٣) الاتجاه من نقطة البداية إلى نقطة النهاية.

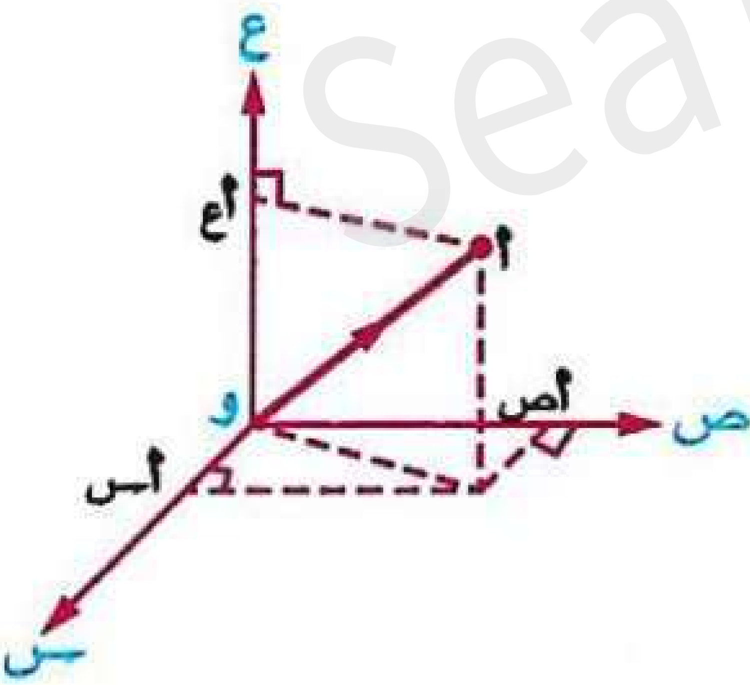
أى أن : القطعة المستقيمة الموجهة هى قطعة مستقيمة لها نقطة بداية ونقطة نهاية واتجاه.

فمثلًا : $أ(س_{1}، ص_{1}، ع_{1})$ نقطة البداية ، $ب(س_{2}، ص_{2}، ع_{2})$ نقطة النهاية

واتجاهها هو اتجاه $\overrightarrow{أب}$ ومعيارها $\|\overrightarrow{أب}\|$ يعرف بطول $\overline{أب}$

ونعبر عن مقدارها واتجاهها معًا بالرمز $\overrightarrow{أب}$

- **متجه الموضع فى الفراغ :**



يتحدد موضع أى نقطة $أ(أ_{س}، أ_{ص}، أ_{ع})$ فى الفراغ بالنسبة لنقطة الأصل و (٠ ، ٠ ، ٠) بالقطعة المستقيمة الموجهة التى بدايتها نقطة الأصل ونهايتها النقطة أ واتجاهها $\overrightarrow{وأ}$

- متجه الموضع لنقطة أ فى الفراغ هو $\overrightarrow{وأ} = (أ_{س}، أ_{ص}، أ_{ع})$ وحيث أن كل متجهات الموضع تنسب لنقطة الأصل و فإنه يمكن كتابة $\overrightarrow{أ}$ بدلًا من $\overrightarrow{وأ}$ للتعبير عن متجه موضع النقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل.

- $أ_{س}$ تسمى مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه محور س
- $أ_{ص}$ تسمى مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه محور ص
- $أ_{ع}$ تسمى مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه محور ع